DISEGNO a DESIGN

2

FONDAMENTI DI GEOMETRIA DESCRITTIVA

a cura di

MICHELA ROSSI
SARA CONTE
GIORGIO BURATTI

SCUOLA DEL DESIGN

POLITECNICO MILANO 1863

Redattori degli elaborati grafici e dei modelli tridimensionali 图形和三维模型

LUCA ARMELLINO
PAOLO ANTONIO COLLIA
FRANCESCA SENA

Traduzione cinese (glossari e testi) 中文翻译（词汇和文本）

YINGFEI ZHU
QIAN ZHANG

Voce narrante 旁白

VALENTINA MARCHETTI (italiano)
QIAN ZHANG (cinese)

Il supporto didattico di azzeramento dell'area del disegno è realizzato grazie al finanziamento erogato della Scuola del Design del Politecnico di Milano nell'ambito del "Progetto pilota di sperimentazione didattica post Covid".

绘图领域的基础支持材料制作得到了米兰理工大学设计学院在“后疫情教学试验项目”提供的资金支持。

Tutti i disegni presenti all'interno del supporto didattico sono stati realizzati dai redattori o dai curatori.

教具中的所有绘图均由编辑或策展人创作。

SCUOLA DEL DESIGN

设计语言：画法几何基础

室内设计学生手册

本教材是进入绘画工作室所需的预备知识汇总，将具有不同背专业背景同学在学校不同课程中所习得的技能提高到同一水平。

本书汇集了学习如何设计所需的知识，设计师需要了解空间的形式，以满足用户的需求，用人工制品使其适合居住。

这既不是一本教科书，也不是一本使用手册，而是一本需要理解的理论原则汇总。其中包含学习画法几何不可或缺的实际应用和技术信息，并且这也是设计的重要表达工具。

本书包含图像、文字和图形及几何投影推理过程，并以可打印的，图文并茂的书籍形式编排。适合 "慢读"，也可作为纸质辅助材料，根据自己的笔记和图纸进行图形推理。

文本附有三维模型，可在软件中旋转查看，以获得更好的视觉效果。同时还附有录音，可让您通过专注于图像来理解几何推理过程。

文本附有建筑学和描绘几何学的主要技术术语词汇表。因为语言的掌握是每一项技术能力的基础，同时提供了对比翻译，包括中文和欧洲主要语言。

该卷的结构将目录分为两部分：第一部分涉及技术绘图的总体结构，汇集了项目图形语言的一系列基本概念，这些概念需要在手绘中了解和应用，以精准正确和易于理解地呈现三维现实。

第一部分包括以下章节：

• 几何学的图形构造，用于控制绘图和初步绘制的精确度；

• 技术绘图的基本规范，尤其是建筑设计绘图的图形代码；

• 在不同比例尺度下表示构造元素的绘图，包括一些有关它们制作和术语的参考。

第二部分涉及画法几何的基础，这是技术绘图应用中对形状和空间进行严格表示的基础：

• 投影几何的理论原则；

• 正交投影；

• 等轴测投影；

• 线性透视。

本书中包含了和基础几何构造图相匹配的录音和中文翻译，并应用易于理解的基础知识，在必要的自主验证前，帮助理解语言并通过听写练习学习不同的构造。

同样，在对三种投影法进行讲解的最后，还以图形方式解决了一些问题，作为练习的大纲，旨在应用所介绍的原理并验证其理解。

目录

1. 投影基础

1.1 导言

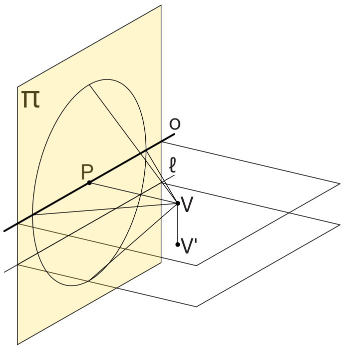
定义

描述几何学是《投影几何学》的图形移植，是将《绘图》转化为一门精确科学的学科，通过精确的（数学）描述，以平面上空间点的投影条件所编码的方法为基础，对空间中的物体进行严格和测量的表示。因此，《描述几何学》研究从一个中心投射到一个平面（称为框架）上的物体的变换，框架对三维空间无限点的二维表示保持了现实空间的点与它们在平面上的投影之间的双向对应关系。

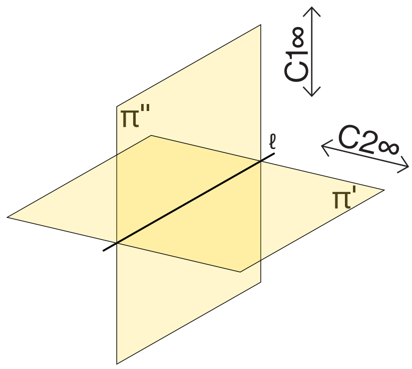
投影直觉源于对光和阴影等自然现象的观察，通过从投影中心（C）进行投影和与框架（π）进行截面的双重操作，可以在平面上表现三维空间的元素。

因此，投影图像是投影和截面双重操作的结果：
– 投影：投影中心 C 和空间中物体所共有的射线和平面。投影实体必须包含中心和被投影元素，因此线（两个点的共同元素）投影点，面（一个点和一个平面的共同元素）投影线。
– 剖面：投影元素与 π 框架的交点。与平面框架相交、
所有投影实体都恢复了投影元素的原始尺寸（直线与平面的交点为点，两个平面的交点为线），因此投影图像恢复了与真实图形在空间中相同的图形特质。
– 在真实图形和它的平面投影之间存在着一种双元对应关系，只要知道投影中心 C 相对于框架 π 的相对位置，就总能从图像（=投影）回到空间中的真实点。

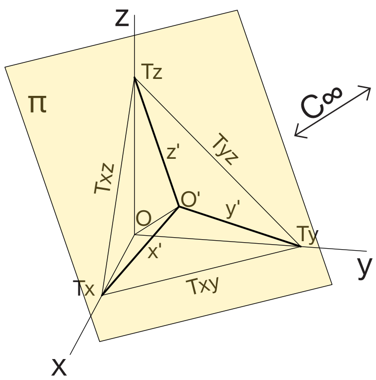
根据投影中心与框架之间的关系（两个基本要素的相互位置），描述几何提供了基于同一投影过程的三种方法：
– 正交投影，从两个相互正交的框架正交的两个不适当中心同时进行双重投影。
– 轴测投影（平行透视），从一个不适当的中心投影到一个平面上，该平面与三条正交轴的基准面成斜角。
– 中心投影，从一个适当的中心投影（线性透视，如果中心和框架在一个水平面上）。



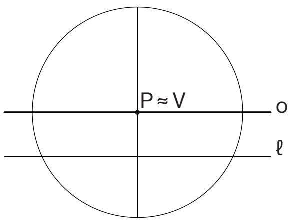
中央视角

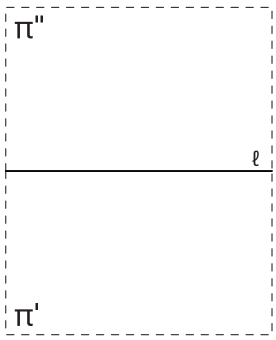


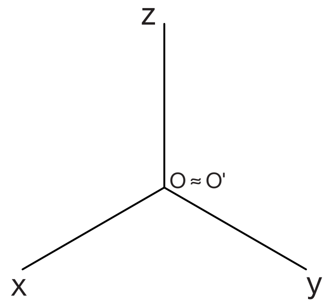
正交检验



平行优先







术语

– 这些点用拉丁字母的大写字母标识：
坐标轴原点，O
投影中心，C（如果不止一个，则使用数字 C1、C2......）
通用点，P

– 线用拉丁字母的小写字母标识：
轴线，a
参考线，l
通用线，r

– 平面用希腊字母大写字母表示：α、β、γ...
投影面称为框架，用 π 表示（如果有多个框架，则使用数字 π1、π2......）。

– 元素的投影用元素名称后的上标''标识。

– 翻转元素用括号（）标出。

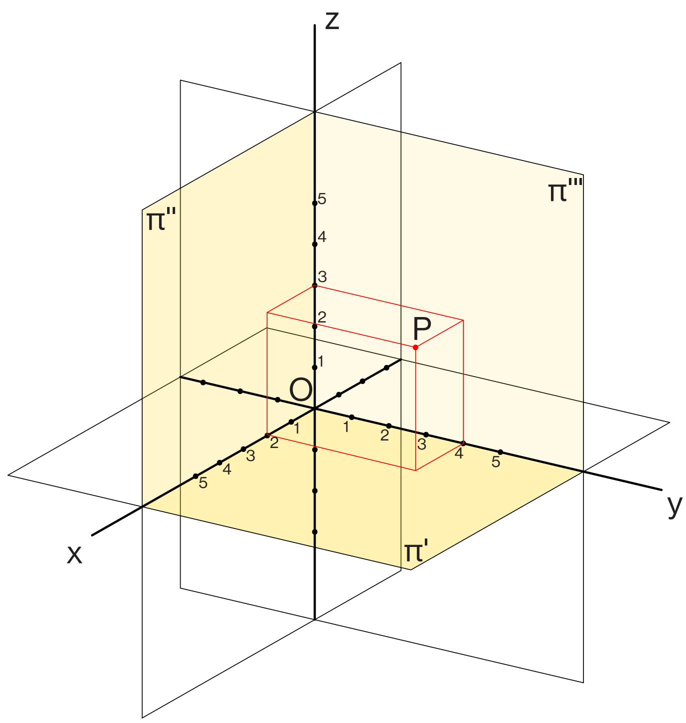
– 我们把实元素与框架的交点称为轨迹：
直线的轨迹是一个点，因此称为 Tr（大写 T）
平面的轨迹是一条直线，因此称为 tα（小写 t）

– 我们称直线不适当点的投影为消失点，因此平行线的消失点是重合的：
直线的飞越点是一个点，所以它将是 Fr（大写 F）
平面的飞越点是一条直线，所以是 fα（小写 f）

1.2 适当和不适当的点

前提条件

解析几何参照特征元素与从共同原点出发的相互正交的三元轴的距离来定义实体在空间中的位置，例如笛卡尔（1566–1650 年）的解析几何所引入的三元轴。

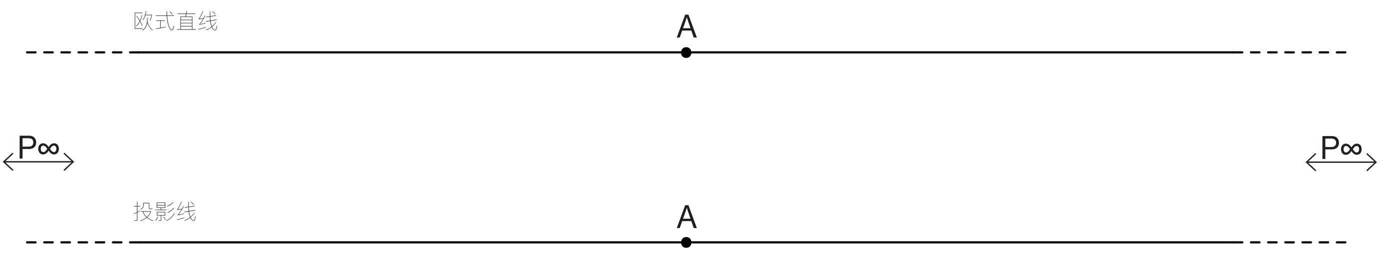


然而，表示空间中所有点的可能性，即使是无限距离的点，也是基于巴洛克数学家几年后提出的新概念，他们研究圆锥曲线，即圆周投影产生的曲线，提出了线的不适当点的概念，并延伸出平面不适当线的概念（Desargue，1591–1661 年）。

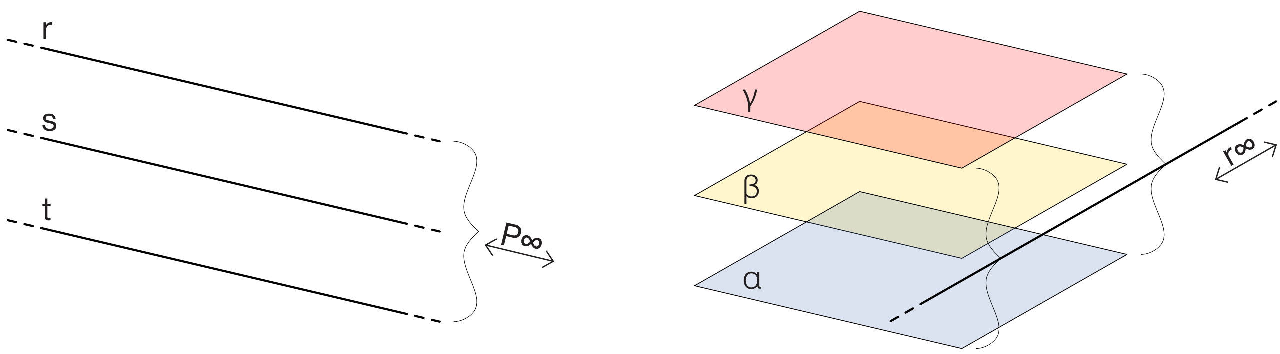
约一个世纪后，加斯帕德–蒙日（Gaspard Monge，1746–1818 年）从正交投影入手，编纂了《描述几何学》，对 19 世纪技术科学思想的发展起到了决定性的作用，证明了通过在相互正交的平面上进行双正交投影，可以科学准确地确定空间中点（或物体面的顶点）的相对位置。从投影中总是可以追踪到空间中的点，因为投影关系在物体和投影之间建立了双单义对应关系。

不适当点

欧几里得的初等几何构想了无限长的元素，如直线和平面，但没有提出它们的表示问题，认为它们分别是点或线的无限和开放的连续，其中一个点将直线分成两条半直线，一条直线将平面分成两个半平面。



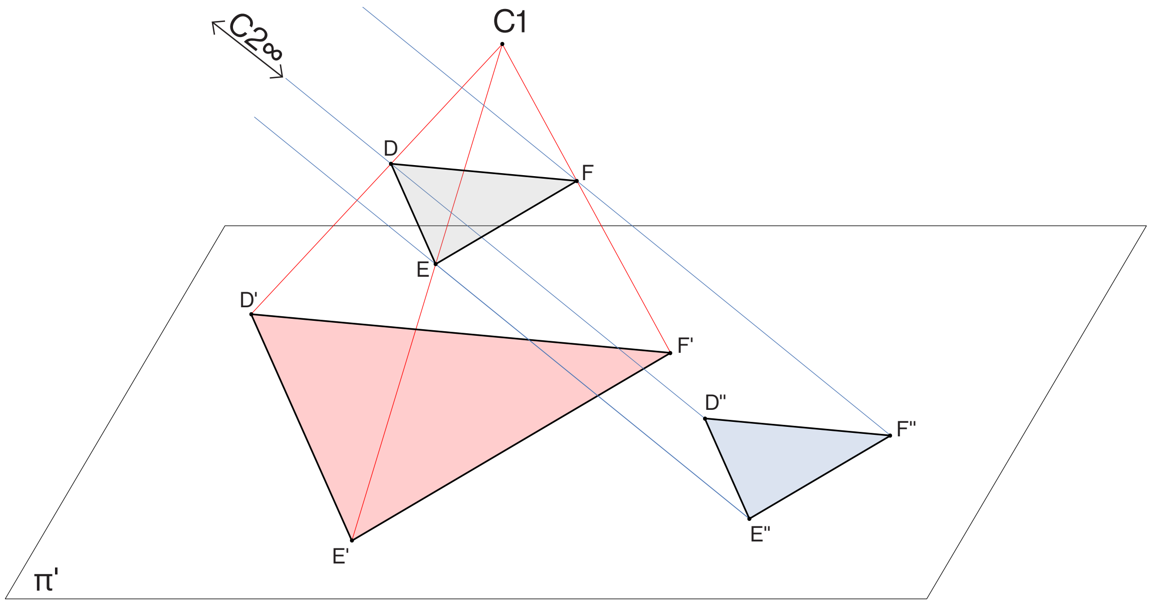
对于投影几何来说，每条直线都有无数个适当点，只有一个不适当点，是所有与之平行的直线的共同点；而每个平面都有无数条适当线，只有一条不适当线，是所有与之平行的平面的共同点（公设）。不适当点称为逸点（或焦点），而平面本身直线的逸点所在的不适当线称为极限线。



1.3 投影

圆柱圆锥体

根据投影中心 C 是适当点还是不适当点，我们会遇到两种不同的情况：
– 如果 C 是一个适当的点，则投影实体是入射到 C 上的线（C 的线/平面星，适当的点），它们在空间中投影点/平面，因此我们有一个圆锥投影或中心投影。
– 如果 C 是一个不适当的点，即一个方向，则投影实体是平行线或平面（与 C 的方向平行的线束/平面），它们将点/线投影到空间中，因此我们有一个圆柱或平行投影。
(莱昂纳多说，投影是由圆锥或圆柱体构成的）。



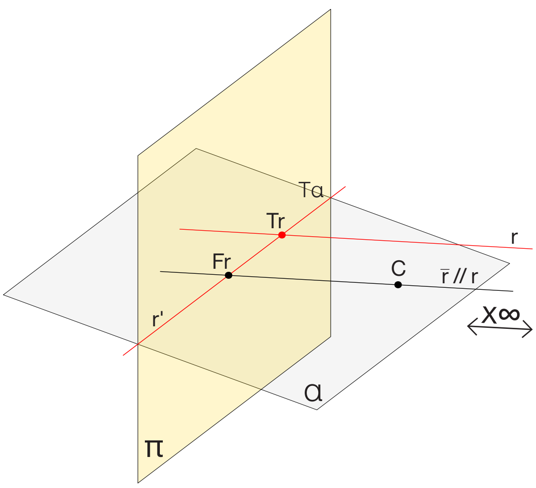
– 在圆锥投影中，不适当元素变为适当元素，平行性不保留。
– 而在圆柱投影中，不规则元素仍然是不规则的，因此平行性得以保留。

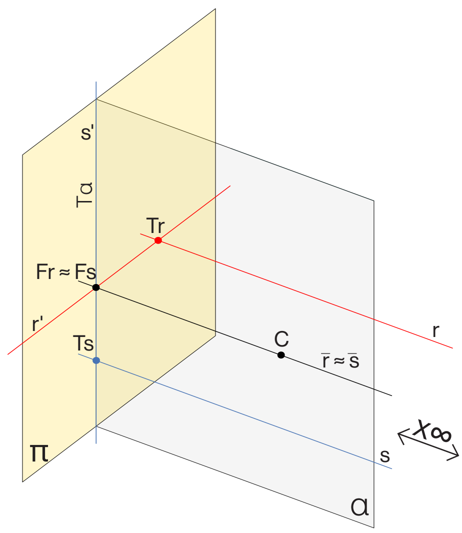
欧几里得几何研究图形的度量不变式（长度、距离、角度），这些不变式在空间刚性运动（平移、旋转）后保持不变；同样，投影几何研究图形的不变式（入射角、对齐度、弧度*），这些不变式在空间一次或多次投影后保持不变，因此，尽管不能保持度量特性，也能识别这些不变式。
* Birapportion = 4 个对齐点的谐波比：b (A, B, C, D)= b (A', B', C', D')。

投影

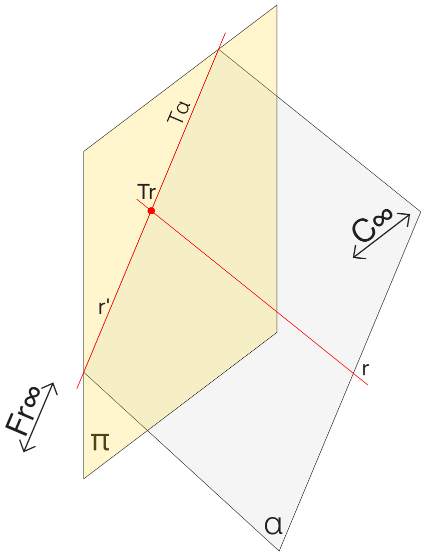
特别是，在中心投影中，平行线有一个共同的消失点（同一个不适当点），就像透视法一样，这是中心投影的一种特殊情况，在中心投影中，画面的位置是相对于水平参考平面确定的。
要确定一条直线的位置，只需知道它的两个点即可，因此它的投影是由属于该直线的两个点的投影定义的：

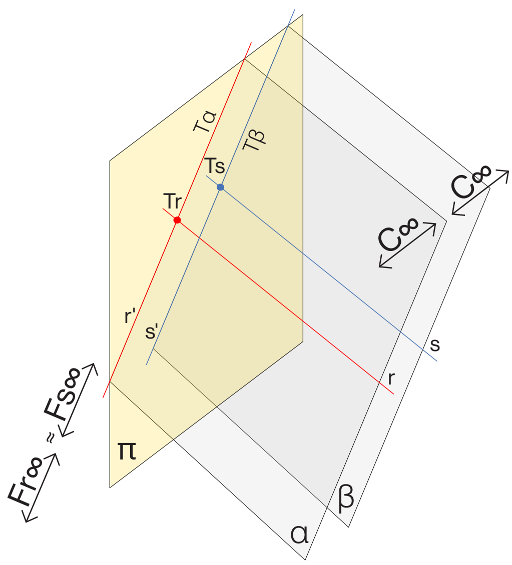
– 它的不适当点（与直线本身平行的投影线的交点，即通过 C 的平行线）或消失点。在从适当中心的投影中，两条平行线有一个共同的适当点（直线的逸出点 = 不适当点的投影 = 适当点）：圆锥投影不保留平行性。





– 任何适当点，例如直线本身与图象（轨迹）的交点，根据归属条件，它必须同时位于直线及其投影上。在从不等边中心的投影中，两条平行线有共同的不等边点，它们的图像是平行的（不等边点的投影 = 不等边点）： 圆柱投影保持平行。



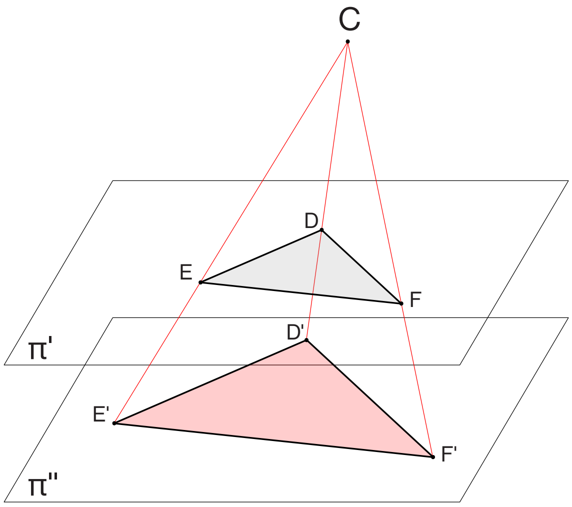


1. 投影基础

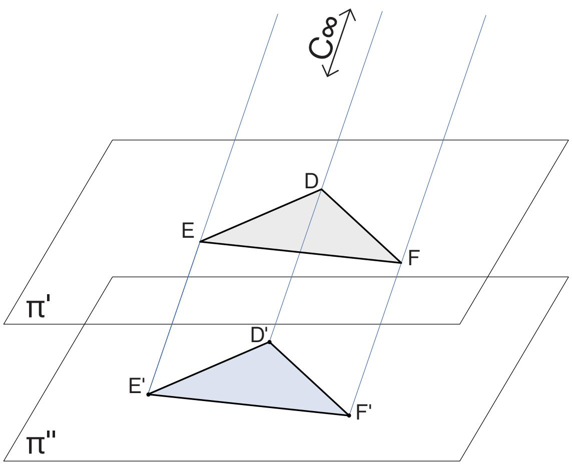
透视

两个平面π'和π''被称为准平面，相交于一条联合线（其点属于两个平面，每个点对应于其投影），在这条联合线上，两个平面的相应线相交；这条线被称为轴线，它可能是适当的，也可能是不适当的。
两个平面各自的不适当线投影到另一个平面上作为边界线，平面的线在这条边界线上逃脱。根据平面 π' 和 π'' 相对于 C 的位置，可以确定不同的视角：

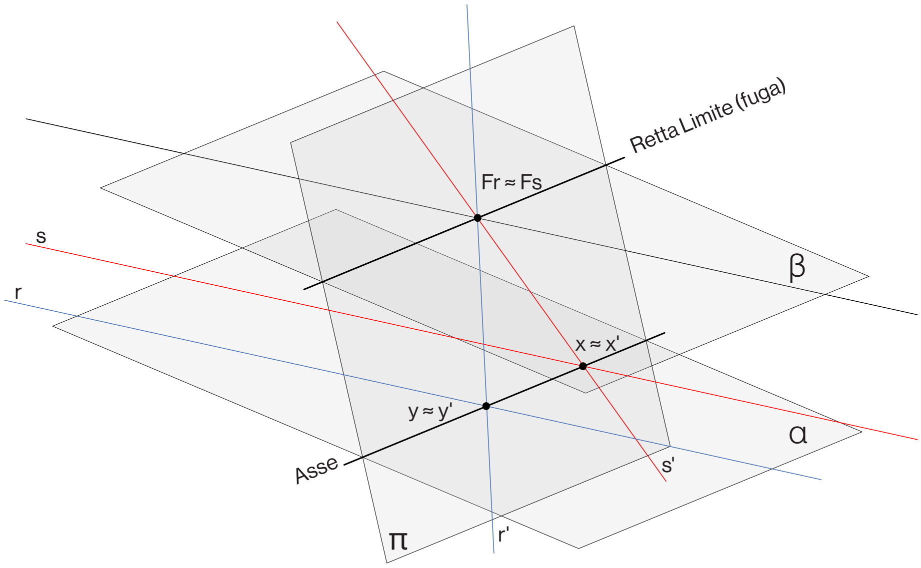
– Homotetia（适当的中心和不适当的轴线––不适当的边界线）保持平行，有角度但没有尺寸，投影是相似的；



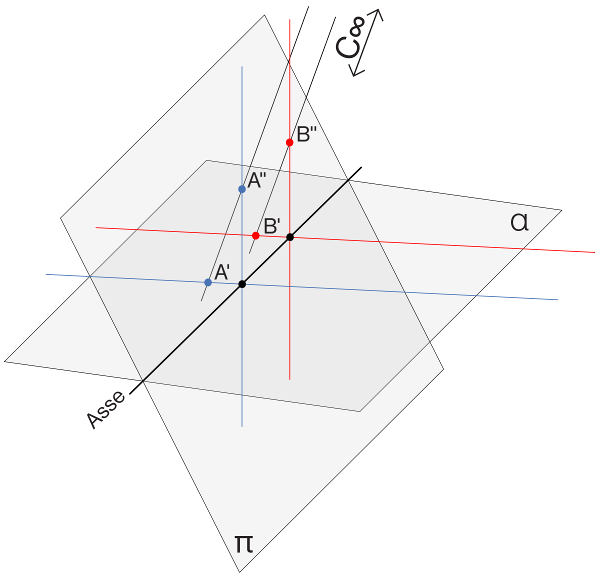
– 平等（不适当的中心和不适当的轴线 – 不适当的极限线）、平行、角度和尺寸保持不变，投影相当于平移；



– 斜交亲和（中心正交、轴线正交 – 极限线正交）只保留投影不变式；



– 正交亲和（不适当的中心、适当的轴线–不适当的边界线）的平行性保持不变，但角度和尺寸不变。在不适当中心垂直于平分线平面的特殊情况下，我有一个反转：平面中的所有点都围绕描述圆周弧线的轴旋转，而度量特性保持不变。



1.4 国际术语表

Italiano	English	Chinese
Altezza	Height	高度
Angolo	Angle	角度
Asse ottico	Central axis of vision / sightline / line of sight	视线中心轴
Assonometria	Axonometric view /paraline drawing	等轴测图
Assonometria isometrica	Isometric axonometry / isometric projection	等轴测投影
Assonometria ortogonale	Orthographic axonometry	正交轴测图
Assonometria obliqua	Oblique axonometry / oblique projection	斜轴测图
Assonometria cavaliera	Elevation oblique	正视斜投影
Assonometria militare	Plan oblique	倾斜平面图
Campo visivo	Field of view / Visual field	视野
Cono ottico (visivo)	Cone of vision	视锥
Distanza principale	Distance from the station point to the picture plane	主距（视角和图像平面之间的距离）
Fuga /retta impropria (di piani paralleli)	Vanishing line	消失线
Punto di fuga /p. improprio rette parallele	Vanishing point	消失点
Intersezione (retta/punto di)	line/point of intersection	相交线/点
(Linea di) Orizzonte	Horizon line	地平线
Linea di terra	Ground line	地线（物体与地面接触的水平线）
Ortocentro	Orthocenter	正交中心
Osservatore	Observer / viewer	观察者
Piano di terra / p. geometrale	Ground plane	地平面
Proiezione	Projection	投影
Proiezioni ortogonali	Orthographic projections	正交投影
Prospettiva	Perspective	透视
Prospettiva razionale (a piano inclinato)	Three-point perspective	透视投影（斜投影）
Prospettiva Accidentale (a due fughe)	Two-point perspective	透视投影（两点透视）
Prospettiva centrale (a una fuga)	One-point perspective	透视投影（一点透视）
Prospettiva lineare	Linear perspective	线性透视
Punto di distanza	Diagonal point	对角点
Punto principale	Center of vision	视觉中心

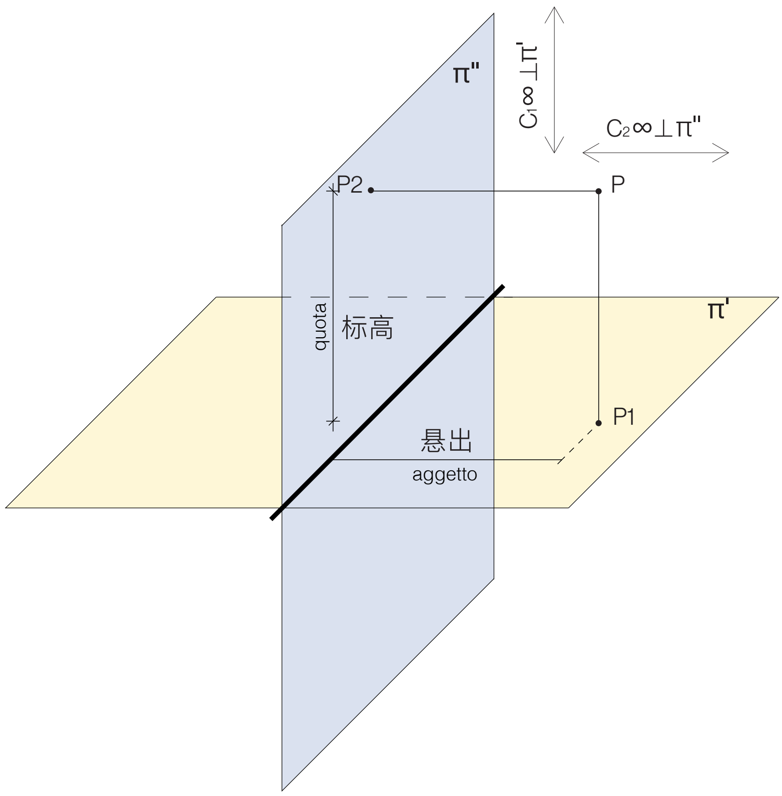
Punto misuratore/di misura	Measuring point	测量点
Punto di vista	Station point / viewer's eye	视点
Quadro (prospettico)	Picture plane	透视投影中的画面平面
Raggio visivo	Visual ray	视线
Restituzione prospettica	Perspective drawing / perspective view	透视图
Retta	(Straight) line	直线
Vista dall'alto	Top view	俯视图
Vista dal basso	worm's eye view / bottom-up view	仰视图
Vista da dietro	Rear/back view	后视图
Vista laterale	Side view	侧视图
Vista a volo d'uccello	Bird-eye view / aerial view	鸟瞰图

2. 正交投影

2. 正交投影

2.1 定义

正交投影法认为，空间被一对相互正交的平面分为四个二面体
– 水平面 π'；
 – 垂直面 π'。
π'和π'' 也称为第一和第二框架，是从 C1 和 C2 正交于两个框架的全投影中心。π'和π''投影平面；它们的交点线称为地面线 l（或 lt）。它们是投影平面，也分别称为第一平面和第二平面。可以用两个正交投影（双心正交投影）来表示空间中的任何物体：
– 在水平面上的第一投影；从 C1∞ 出发的 π'
– 垂直面上的第二个投影；从 C2∞ 反向投影到 π' 的 π'
投影射线始终垂直于各自的投影平面。



....

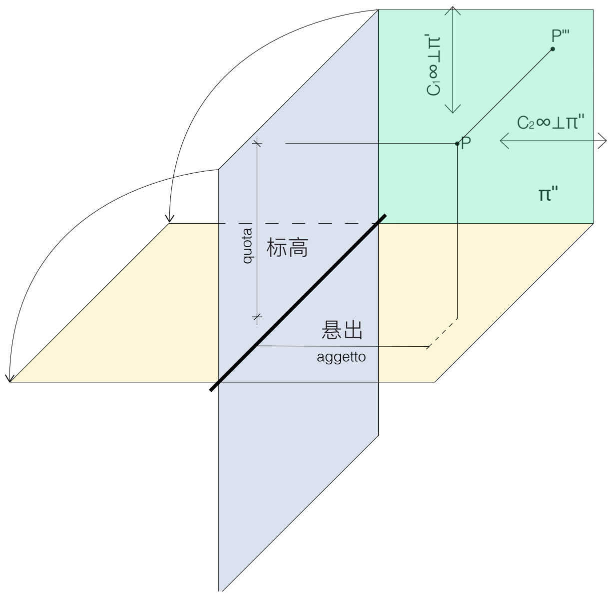
....

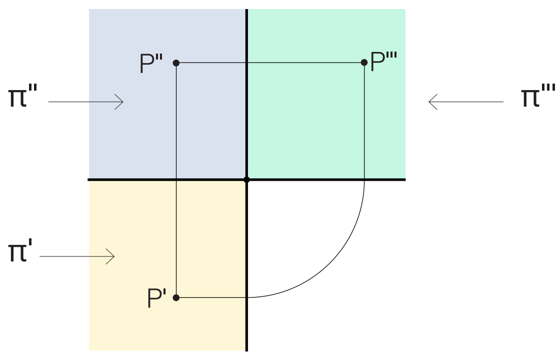
....

....

....

属于与投影正交的平面的几何实体和平面图形不会变形，因此在其表示上可以直接测量（按比例）。
然后将水平面翻转到垂直面上，在同一平面上产生两个投影，使其与绘图平面重合。
有时，这两个投影不足以完全表示物体，这时就需要在适当选择的平面上进行其他正交投影，然后翻转到垂直面上（多中心正交投影），因为第三个投影面 π' 通常与前两个投影面垂直（因此与地面线垂直）。
π'与π "的交线称为次地面线，由于平面π'和π "反转到π "上，它在绘图平面上具有双重表示。
在图中，参照属于第一斜面的点 P 的正交投影，说明了通常用于实现属于二次地面线对偶表示的点的对应关系的图形程序。



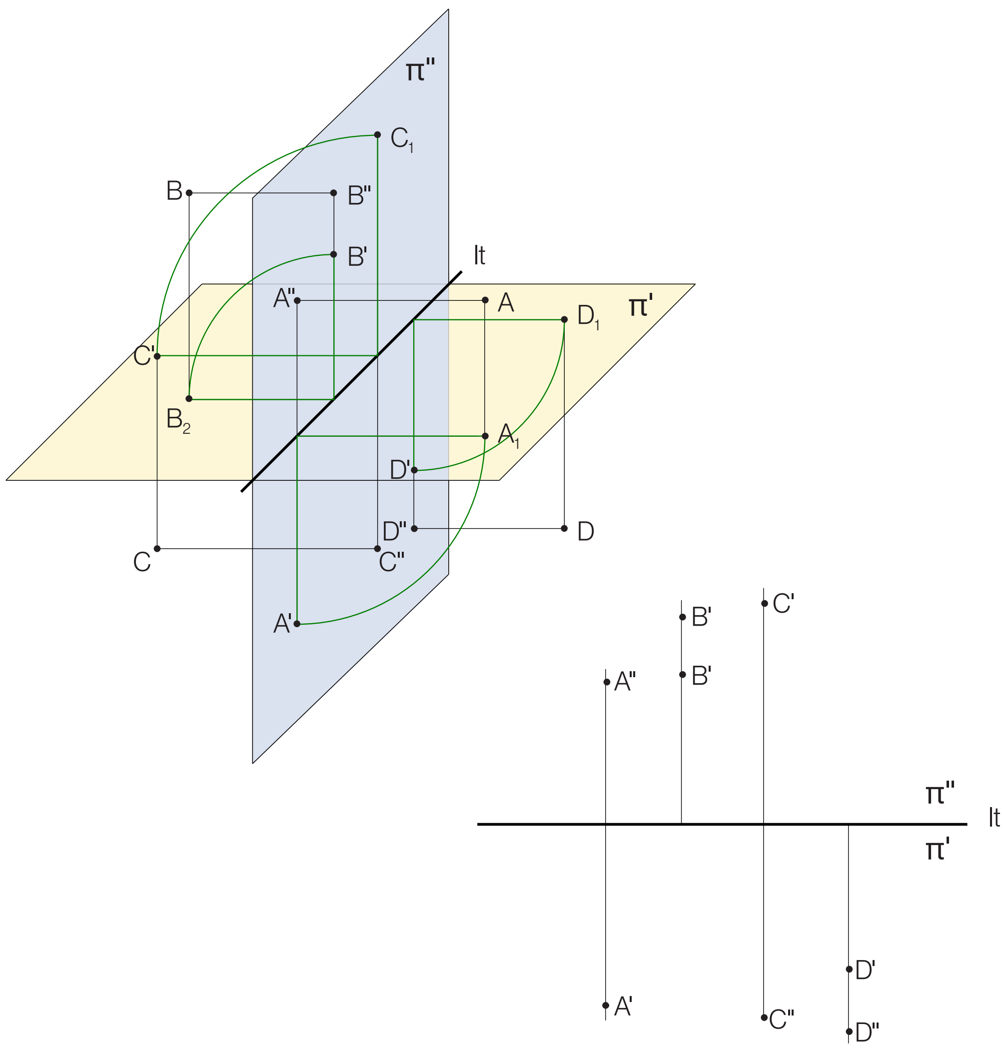


在下文中，为简洁起见，"投影 "一词指的是正交投影。
通常情况下，要投影的物体被放置在第一斜面上，因此第一和第二投影分别位于地面线的下方和上方。
如前所述，我们将用大写字母表示
点用大写字母表示（A、B、P、Q……）；线用小写字母表示（A、B、P、Q……）；平面用字母 π 表示。
可见边缘用细的连续符号表示，被遮盖的边缘用同样粗细的虚线表示。切面用粗连续符号表示，参考线用极细符号表示。

2.2 投影表示的要素

点

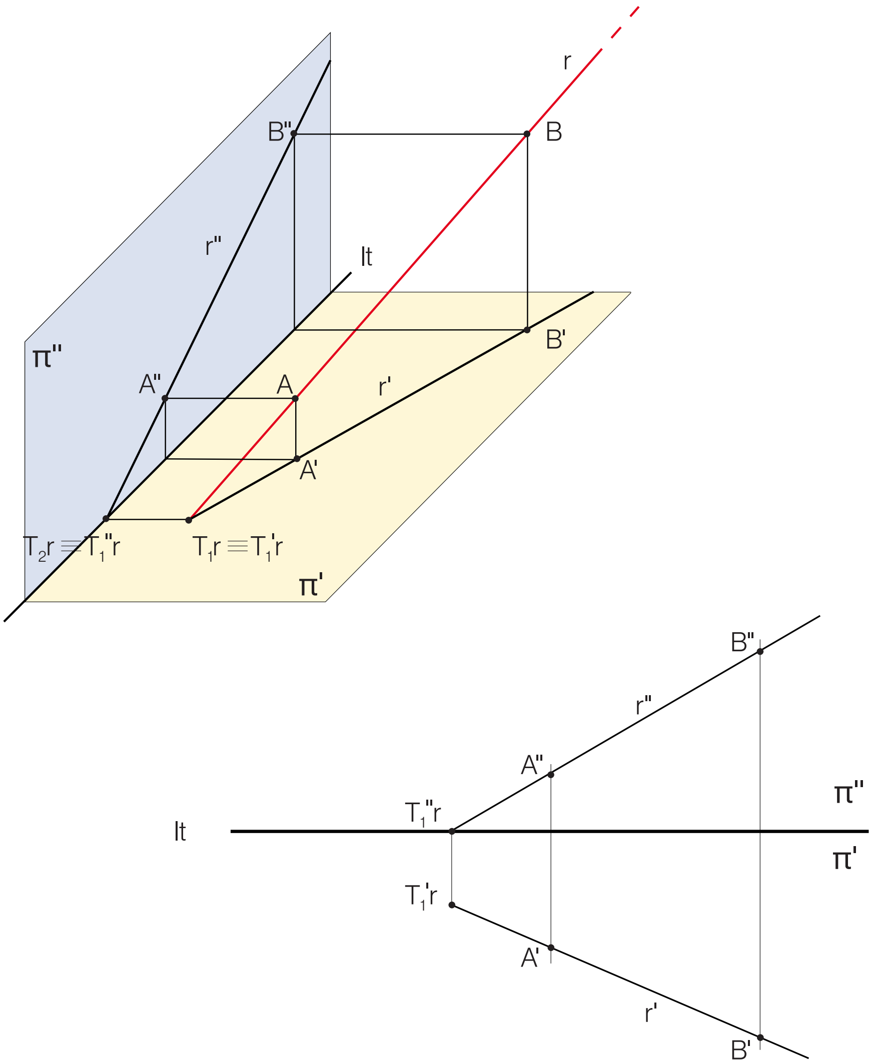
考虑空间中的一个点及其在平面 π' 和 π'' 上的投影。
如前所述，将π'反转到π''上，我们会根据点所属的二面性得到该点的不同表示。
如图所示，四个点的正交投影分别属于空间所划分的四个不同的二面体。



点的表示： A 属于第一个二面体；B 属于第二个二面体；C 属于第三个二面体；D 属于第四个二面体。

线

要表示一条直线，只需知道属于该直线的任意两点 A、B 或该直线的交点 π' 和 π''，即该直线分别在两个框架 π' 和 π'' 上的轨迹 T'r 和 T''r。
假设有一条直线 r 和属于它的两个点 A、B。
直线的投影 r' 和 r'' 经过两点的同名投影。

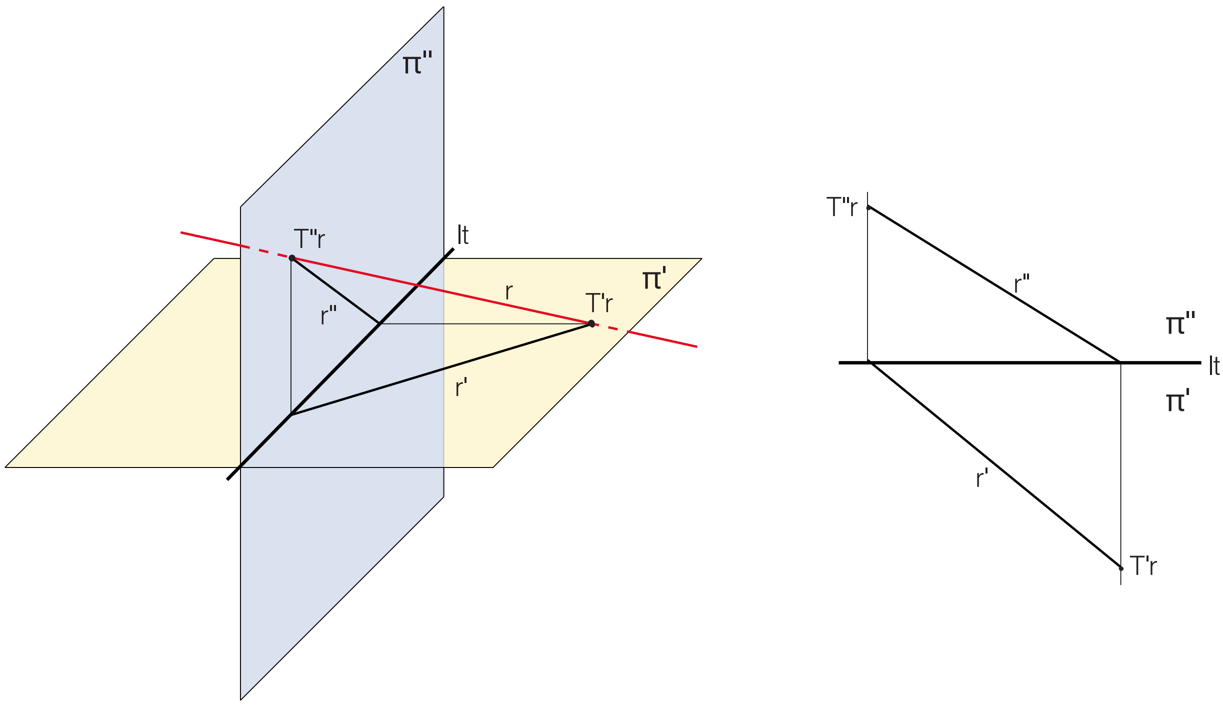


经过 A、B 两点的直线 r。

2. 正交投影

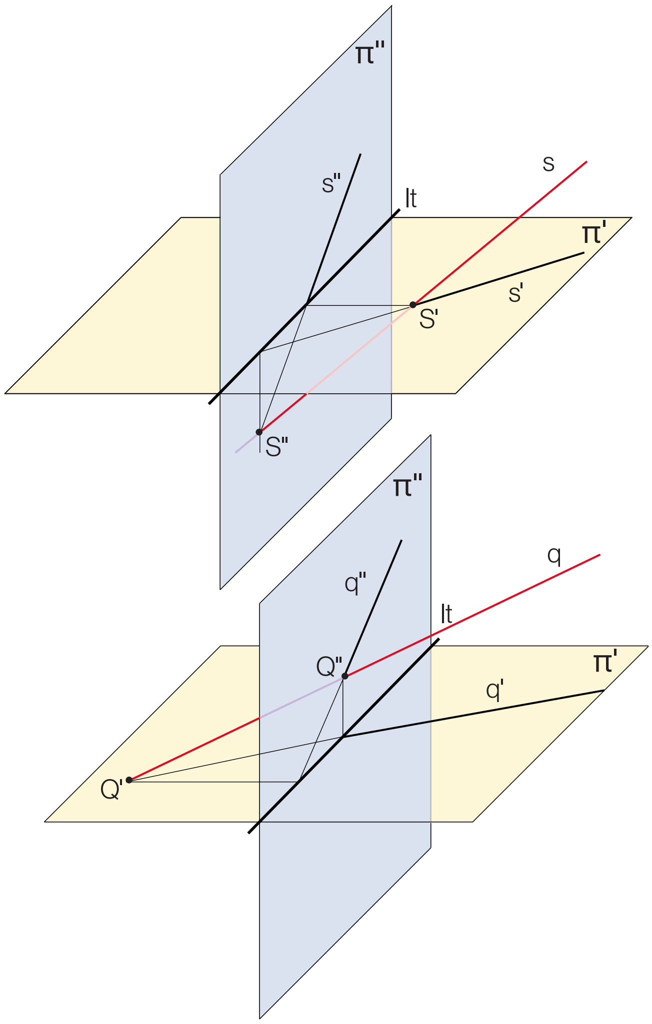
轨迹

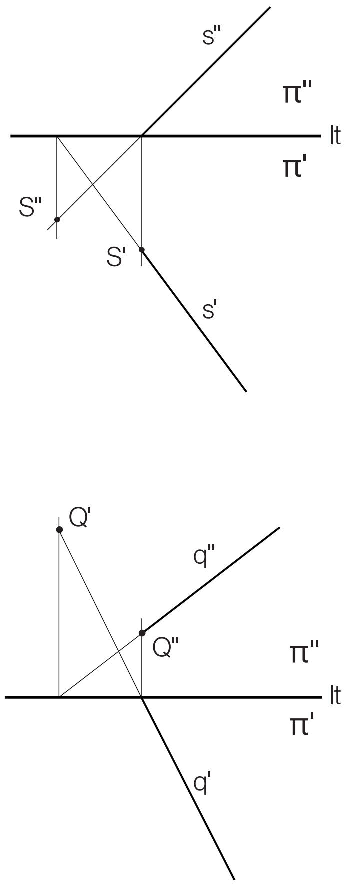
直线与投影面的交点称为线迹。称 r 为所考虑的直线，我们用以下符号表示：
T'r 是 π' 上的轨迹（第一轨迹），T''r 是 π'' 上的轨迹（第二轨迹）。
属于投影面的轨迹在地面线上分别有第二和第一投影。
图 6 表示直线，其轨迹位于不同位置。必须注意π'反转到π''后轨迹所处的位置。
从图中可以明显看出，在指定了直线的轨迹后，就可以立即确定直线本身的正交投影。



不同位置的直线痕迹。

每条直线都有两条轨迹，这两条轨迹可以是正轨迹，也可以是不正轨迹（当 r 平行于其中一个框架时）。
每条轨迹都是一个点，因此有两个投影：一个在 T1r'T1r'' 上，另一个在 T2r'T2r'' 上，分别是 r 的第一轨迹和第二轨迹的第一投影和第二投影。

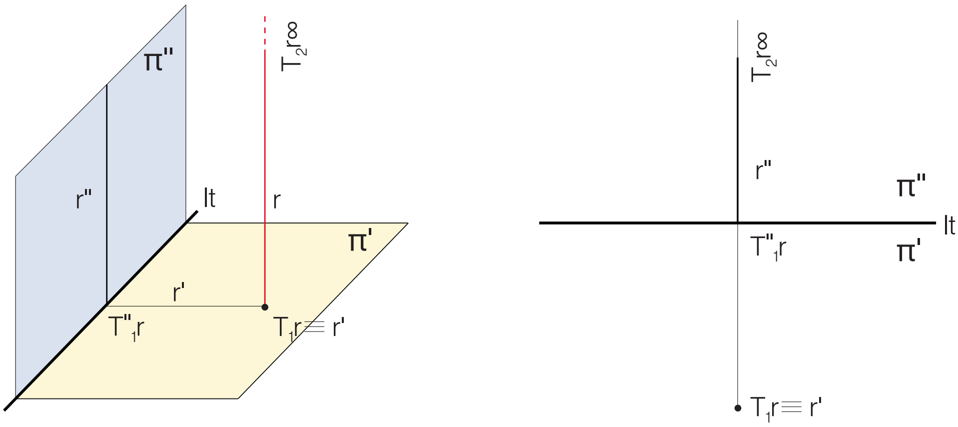




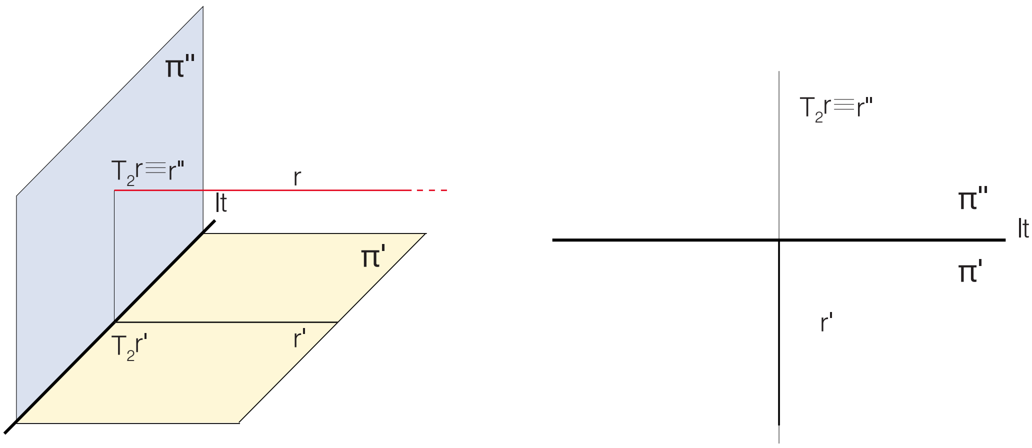
2. 正交投影

线的特定位置

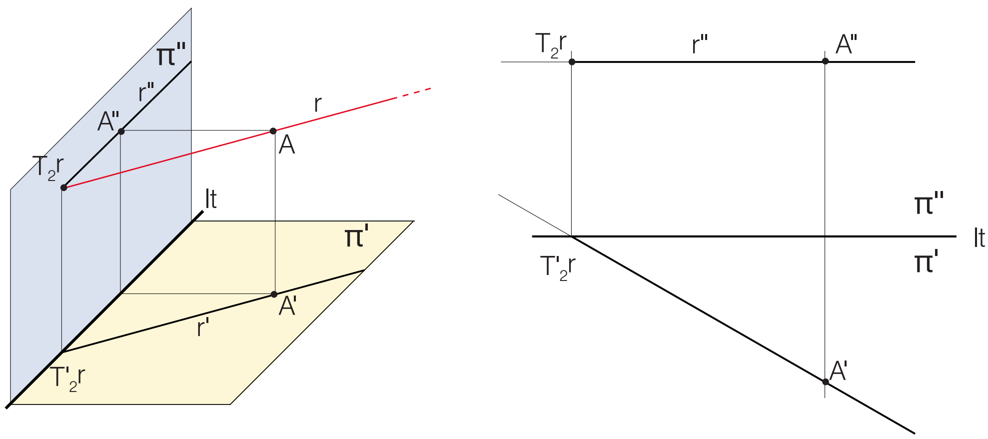
下面的图表示了一些特定位置的线条。



垂直于 π' （垂直）的直线



与 π'' 垂直的直线

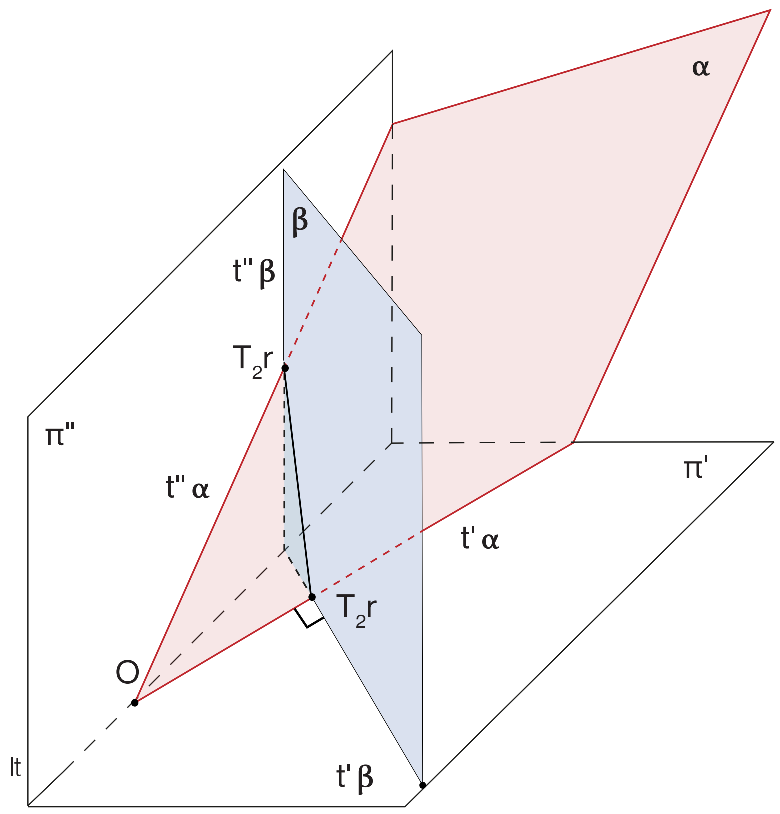


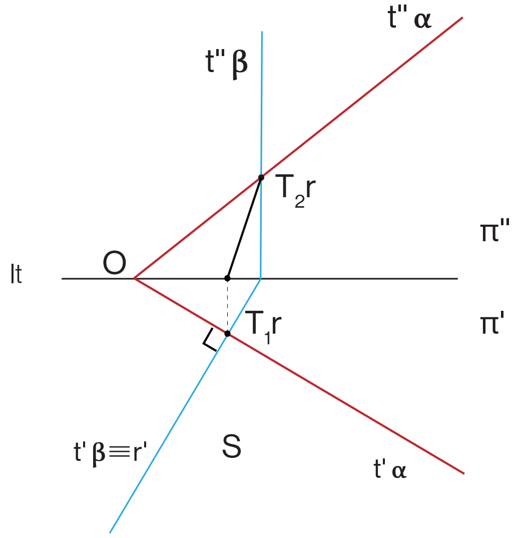
水平线

平面的表示

回顾一下，一个平面可以通过以下方式确定：
– 三个不共线的点；
– 一条直线及其外一点；
– 相交于一点的两条直线（可以是相交于特定点或者不特定点）。
表示平面时，使用相交线是方便的：这些相交线是平面与投影平面相交的直线，也就是它们在 π' 和 π'' 上的交线 T' 和 T''。 如果平面与其中一个投影面平行，则相关的交线是不确定的。

如果平面平行于地面线，则交点为不适当点；轨迹相互平行，也平行于地面线。要测量与 π' 的夹角，必须取垂直于 T' 的辅助平面 α（π''也是如此）。该平面的斜率是最大斜率线相对于 π' 的角度，该斜率线始终垂直于 T'。

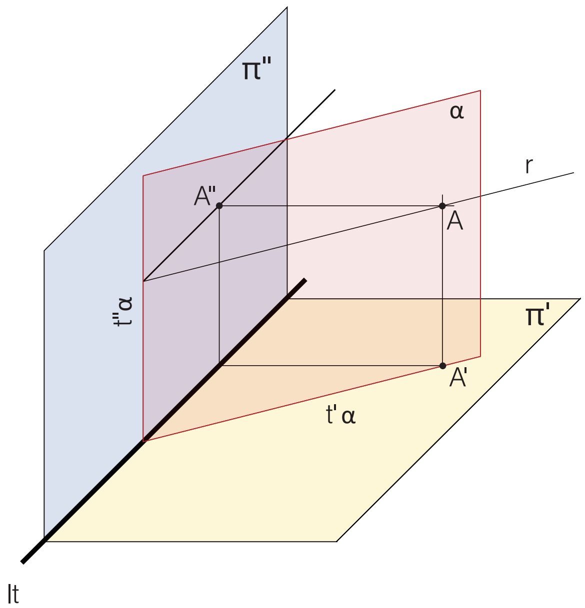


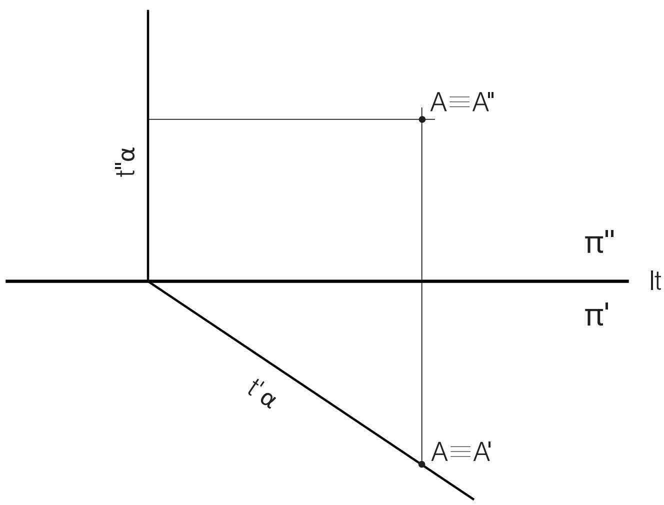


2. 正交投影

特定位置的平面：投影面

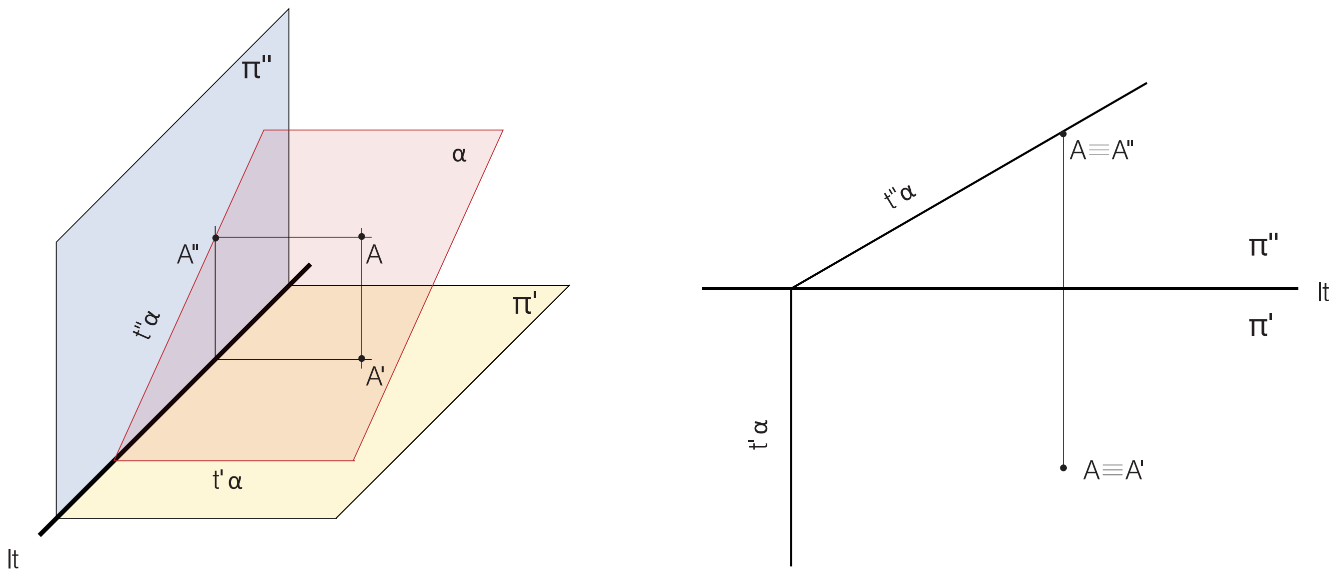
与投影面垂直的平面称为投影面。
垂直于 π' 的投影面称为第一投影面；其第一轨迹包含属于该平面的任何点或线的第一投影，其第二轨迹垂直于地面线。





α = 第一个投影面。

与垂直投影面 π'' 垂直的平面称为第二个投影面，其特征与前一个平面相似。



α = 第二投影面。

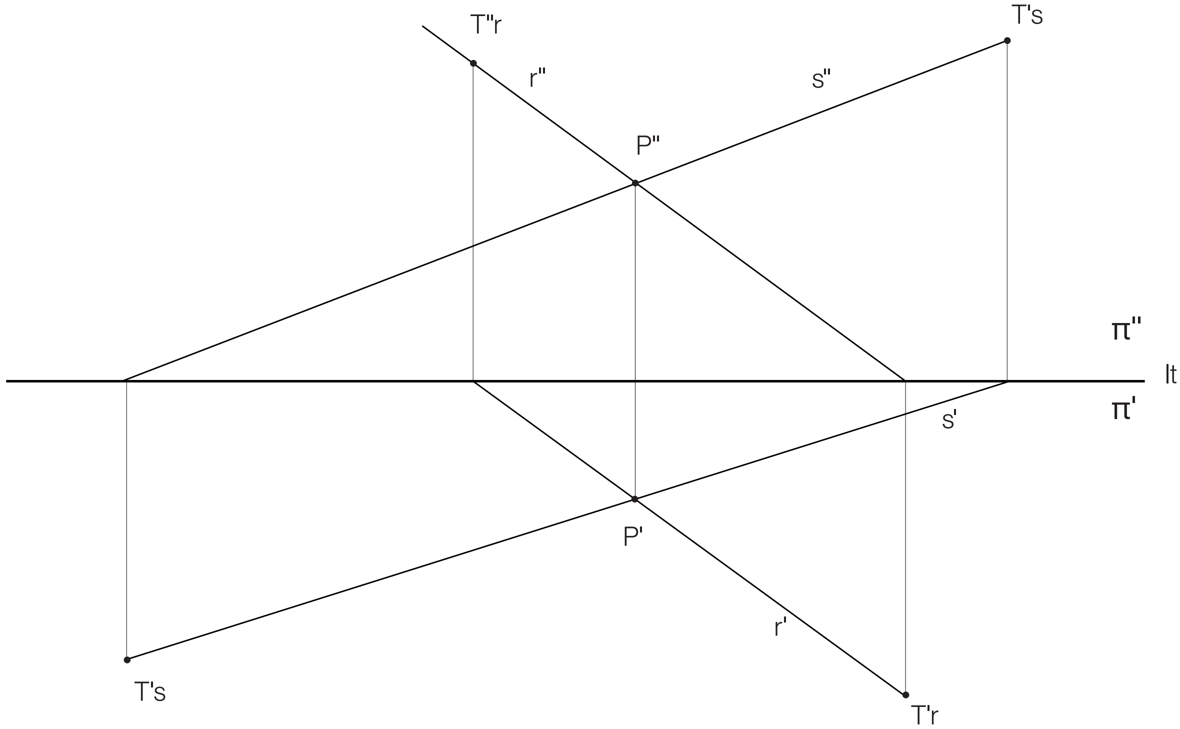
2.3 几何条件

从属关系

点之间的从属关系：
如果两点的同名投影重合，则两点重合。

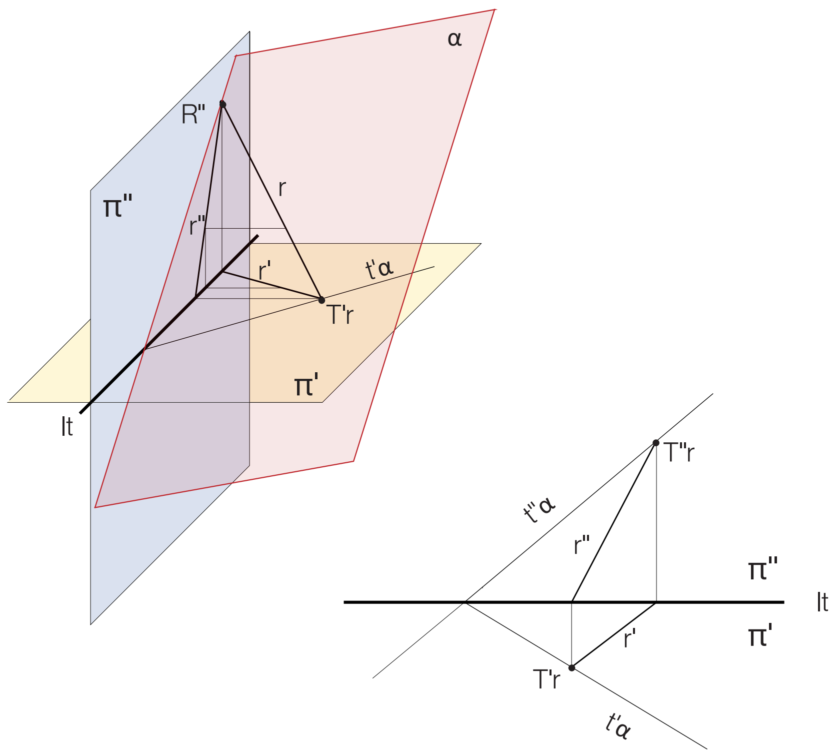
点与线之间的从属关系：
如果点的投影属于直线的同名投影，则点属于直线。

线与线之间的从属关系：
当两条直线有一个共同点时，这两条直线是相交的。事实上，只有在这种情况下，直线投影的交点才代表空间中的一个点（交点）。

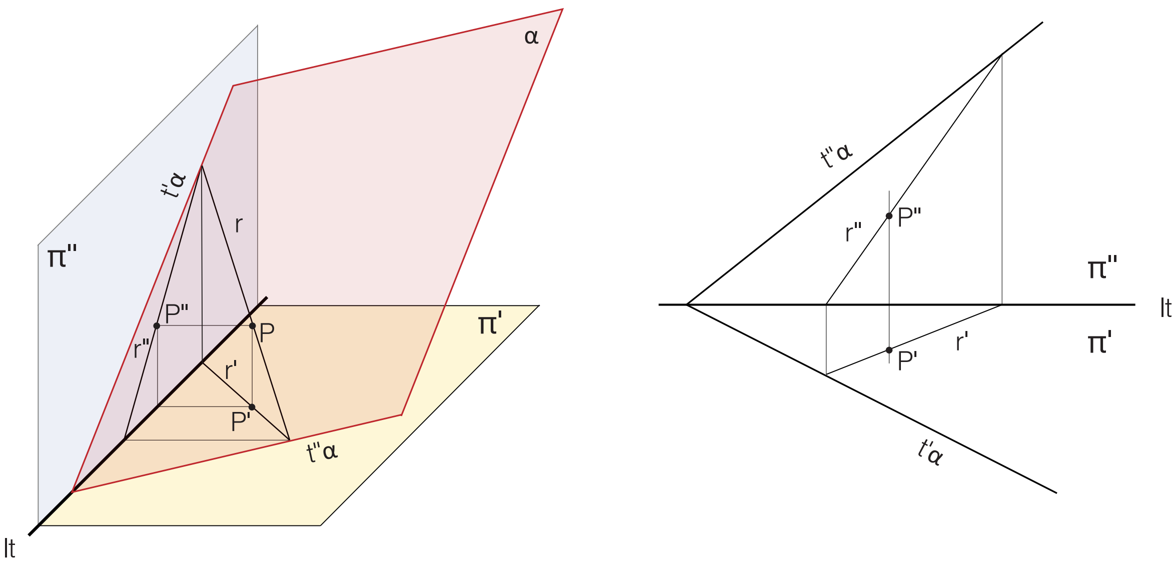


两条入射线的正交投影。

直线与平面之间的从属关系：
当直线 r 的轨迹位于平面 α 的同名轨迹上时，直线 r 属于平面 α。



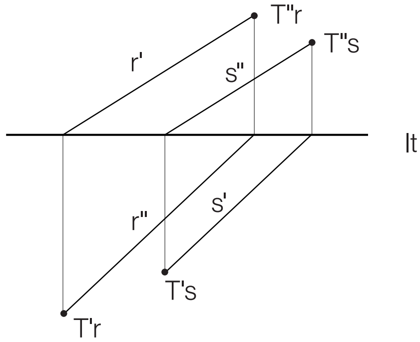
点与平面之间的从属关系：
点 P 属于平面 α 的必要条件和充分条件是它属于平面中的一条直线 r。



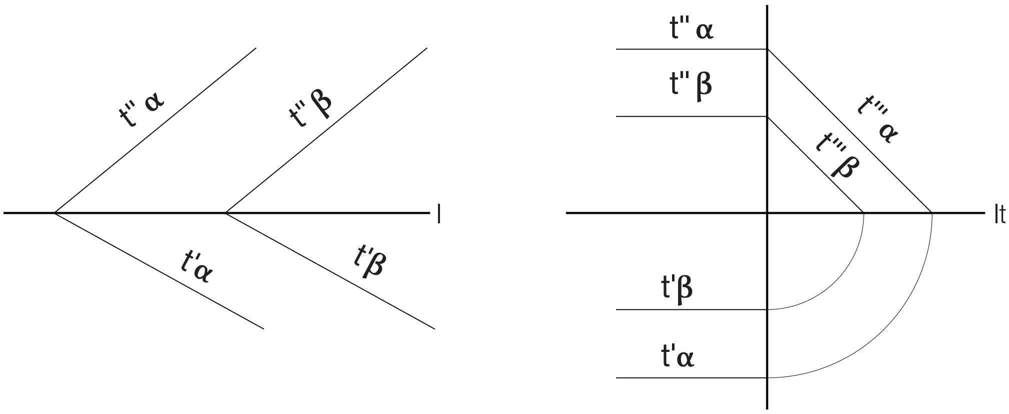
2. 正交投影

平行

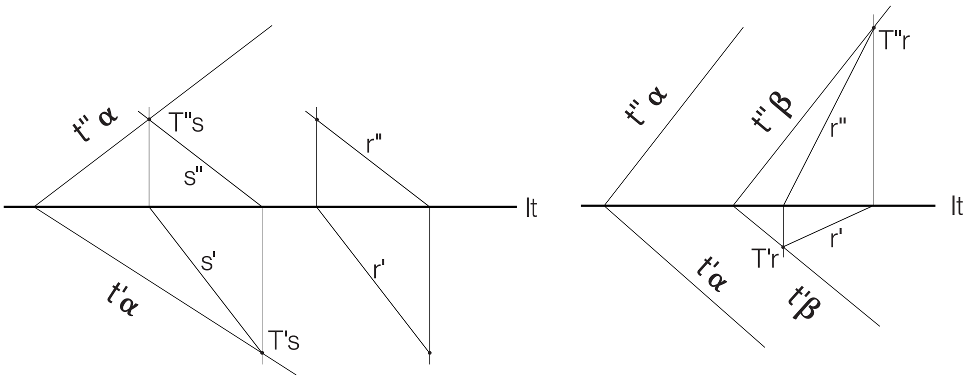
直线间的平行：
如果两条直线的同名投影平行，则这两条直线平行。



平面间的平行：
如果两个平面有同名的平行轨迹，则这两个平面是平行的。在平面与地面线平行的特殊情况下，还必须考虑侧面投影面上的第三条轨迹。

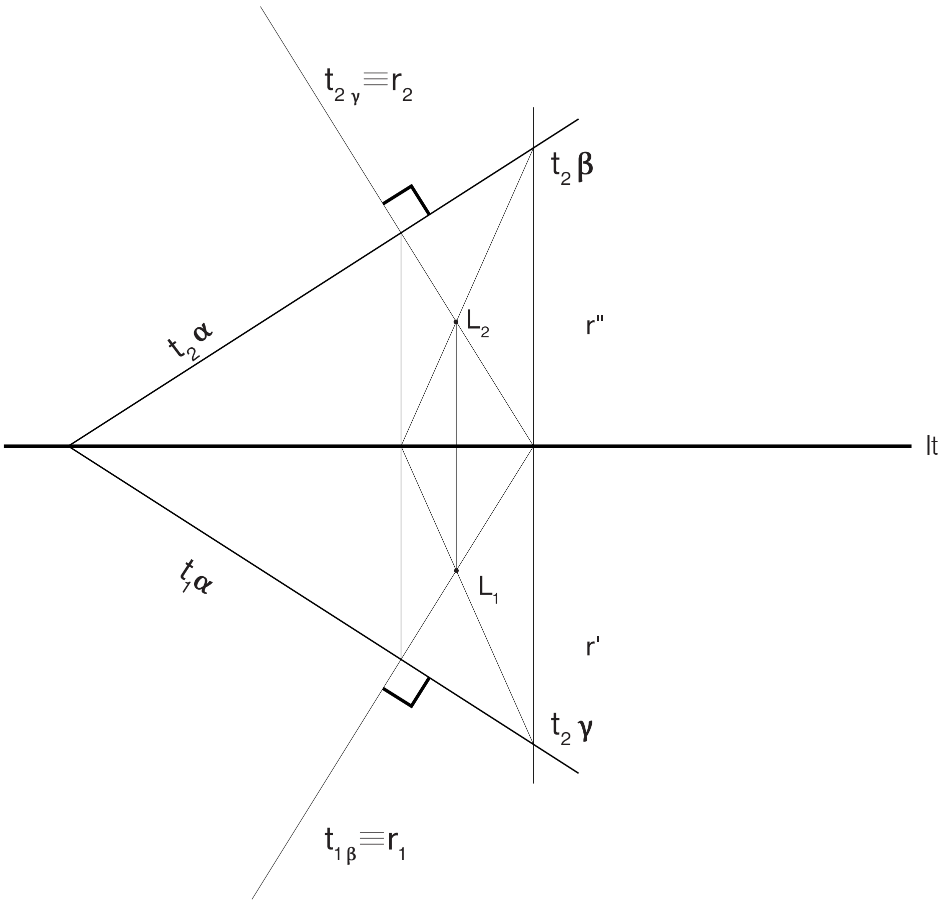


直线与平面的平行关系
如果可以在一般平面 α 上画出与给定直线 s 平行的直线，或者可以画出通过直线本身并与给定直线平行的平面 (β)，则直线 r 平行于一般平面 α。



垂直的条件

直线与平面垂直：
当直线的投影垂直于平面的相应轨迹时，该直线与平面垂直。直线 r 可视为与 π' 正交的两个平面 β 和与 π'' 正交的两个平面 γ 与 α 的交点。

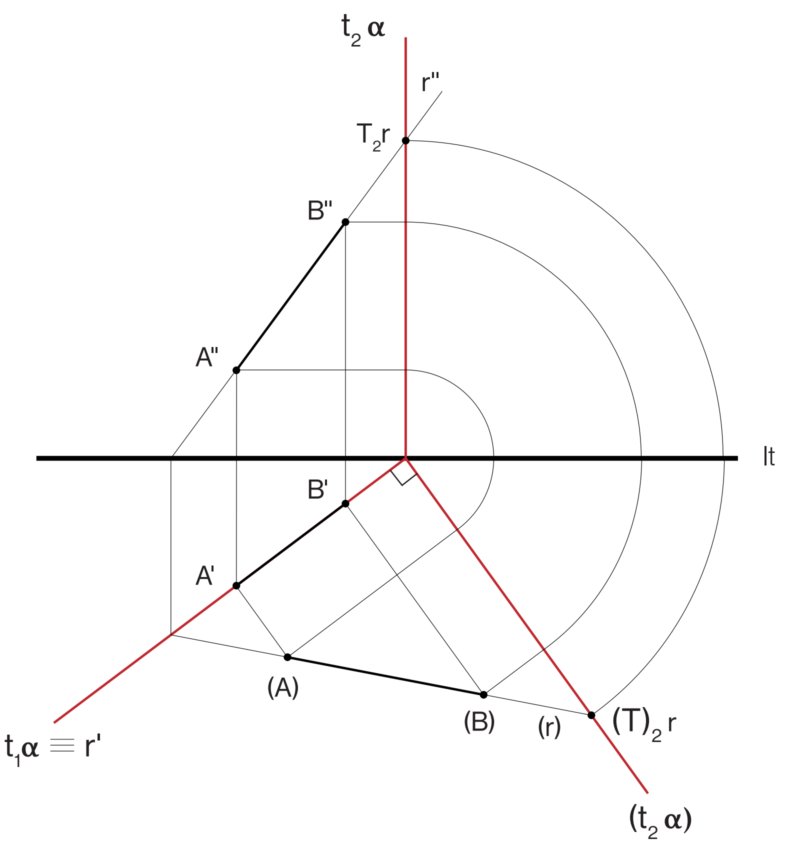


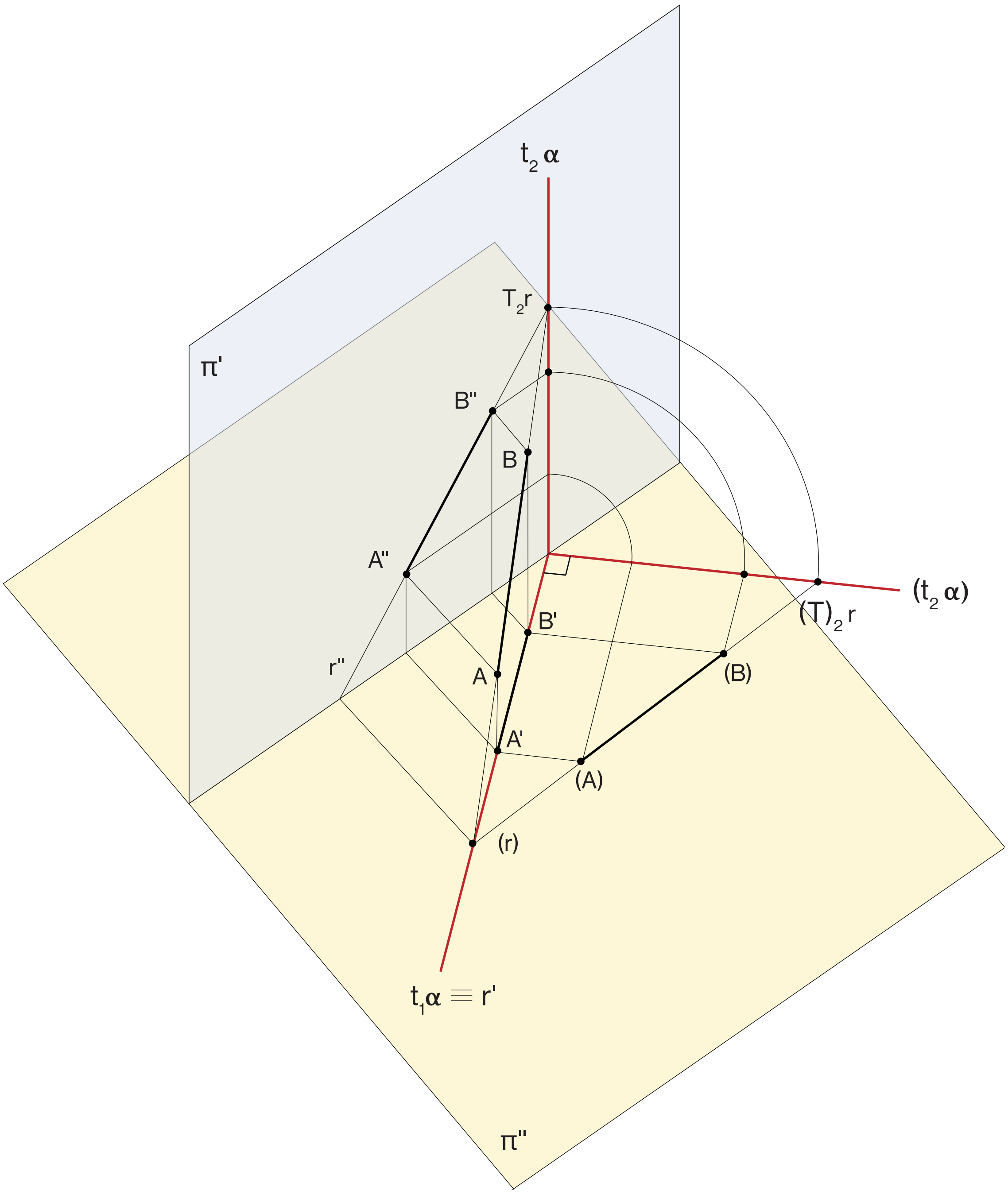
2.4 真实测量

要测量与投影面不平行的元素的真实尺寸，就必须使它们 "可触及"：为此，只需将它们翻转到其中一个投影框架上，围绕它们的共线（翻转轴线）翻转一个包含它们的辅助平面。
为方便起见，最好使用一个投影平面，根据线段的倾斜度选择水平或垂直。

例题
给两点 A (A'A') 和 B (B'B')，测量线段 AB 的长度（两点间的距离）
– 第一投影 A'B' 位于投影面 α 的第一轨迹 r'上，这是 AB 的唯一垂直面，也是同名框 π' 上的倾斜轴线。
– 众所周知，在翻转过程中，平面上所有点的旋转半径等于它们与轴线的距离，因此要翻转 α（垂直于 π''），只需翻转 t''α 即可。
– 因此，推翻 (T'r) 中的 T'r，并将 (t''r) 与 t'r 相接，我们就可以找到点 (A) 和 (B)，它们是线段 (AB) 的极点，也是线段的真实大小，通过推翻投影线 AA' 和 BB'（从 A' 和 B'垂直于 t'α）可以确定。

这样，就可以测出直线 r 与 π'（斜率）之间的夹角。
同样，我们可以将投影 β 到 π' 的平面围绕 t''β（与 r'重合）翻转，并画出与 A'、B'的垂线，从而解决问题。这样就测出了直线 r 与 π''之间的夹角。

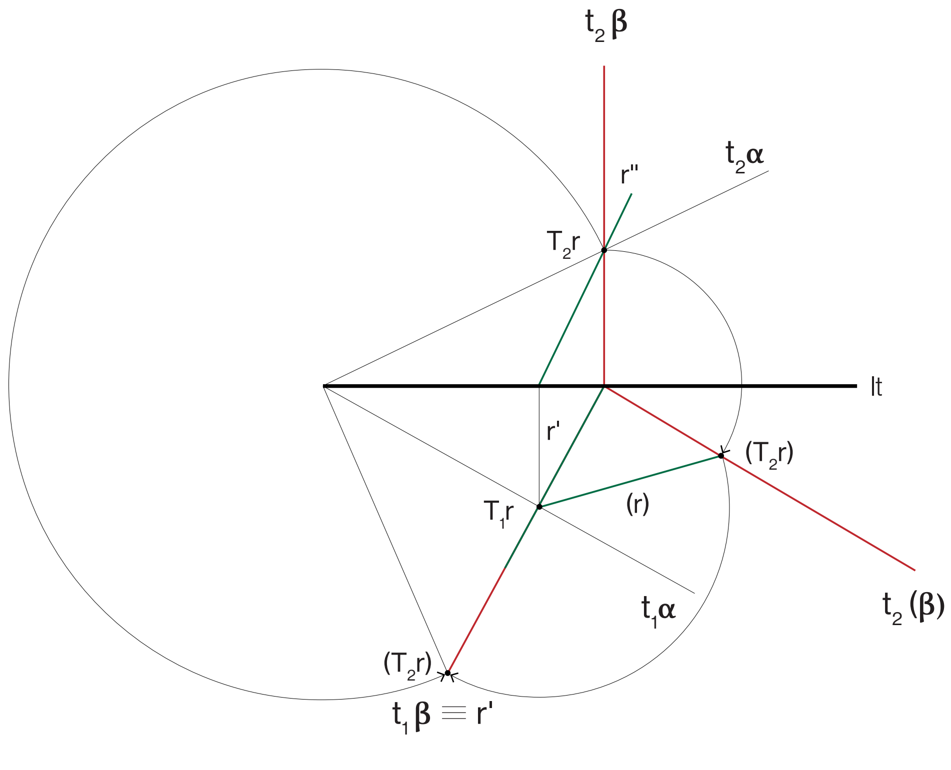


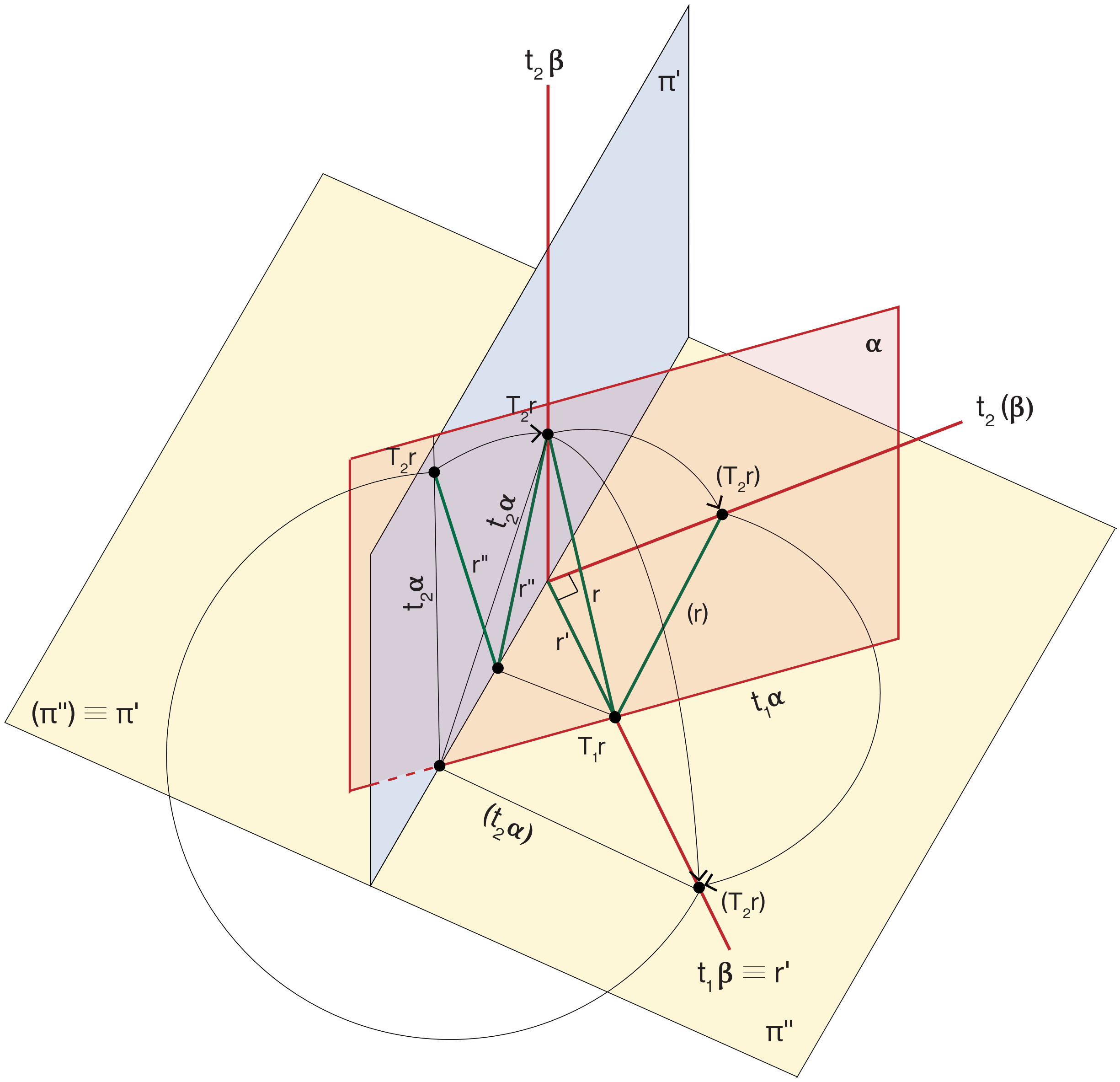


$t_2\,\alpha$
T_2r
π'
B''
B
A''
r''
A
B'
A'
(B)
(A)
(r)
$(t_2\,\alpha)$
$(T)_2\,r$
$t_1\alpha \equiv r'$
π''

2. 正交投影

对于属于（待测量或构造的）一般平面的图形，可以方便地将整个平面围绕其在其中一个投影面上的轨迹翻转。因此，每个投影面都有两种可能的翻转方式。
例如
将一般平面 α 翻转到 π' 上：
– 通过将辅助垂直面 β 翻转到 π' 上，将迹线 t "α 的任意一点翻转到 π' 上（见前面的例子）、
– 通过测量 ω 与 π' 的夹角，推翻 (r) 中的最大斜率线 r（α 与 β 的交点线）。
– 最后，我们在 π' 上翻转 α，方法是翻转线段 T'r(Tr) 中两个平面 α、β 的公共点，记住每个点的翻转都会使它绕轴旋转，半径等于它到同一平面 α、β 的距离。
– 那么（T'r）在（T'r）中以 T'r 中与 T'β 重合的 r' 的延长线为中心在 π' 上翻转。
注意到 α 点在π'上的翻转和翻转的轴 t'α 之后，我们继续考虑 α 点在π'上的第一投影与其翻转（翻转的同调）之间的双单义对应关系，即相应的线在轴上相遇，相应的点与中心对齐（翻转的方向，垂直于轴）。α 在 π' 上的翻转也可以通过直接翻转 t "α 在 π' 上来确定：
事实上，t "α 是真实大小的，我可以在其上任意取一点，从 t'α、t "α 的共同点 K 出发，根据其所属的垂直平面将其推翻；该点将位于半径 O 与
t'β （t "α 的翻转垂直面）相交的地方。




t₂ β
π'
α
t₂ (β)
T₂r
T₂r
(T₂r)
t₂α
t₂α
r"
r"
r
r'
(r)
(π") ≡ π'
t₁α
T₁r
(t₂α)
(T₂r)
t₁ β ≡ r'
π"

3. 解析几何

3.1 导言

轴测法是蒙日在 1794 年出版的论文《描述性测量学》中描述的一种在三维空间中表示物体的图形方法。
它在 19 世纪发展成为军事领域的一种表示方法（军事骑兵轴测法），并在 19 世纪下半叶的手册中被普遍用于表示建筑系统。
20 世纪，De Stil 和理性主义运动（格罗皮乌斯、密斯–凡–德罗等）的建筑师们在建筑绘图中广泛使用轴测法，结构主义者（瓦克斯曼）延续了这一传统，因为这种表现手法为描绘空间和模块化建筑和构造网格提供了可能性。

轴测法是从一个不适当的点进行投影的一种特殊情况，然后产生一个圆柱形平行投影，投影到一个π框架上，这个π框架一般是根据三条正交参考轴定向的。由于参照物相对于框架的旋转强调了三维形式，因此轴测法也被称为平行透视法。不适当中心 C∞ 相对于框架 π 的方向必须与三条轴线的方向不同。
在众多可能的组合中，我们可以找出代表特定情况的轴测法类别和类型。
第一种细分来源于不适当中心相对于框架 π 的方向，并确定了两个类别：正交轴测法和斜轴测法，它们分别对应于相对于框架正交或一般倾斜的投影方向。
正交轴测法生成的图像失真较少，因此更加逼真，这就是为什么斜轴测法只用于某些特殊情况，如骑兵轴测法、军事轴测法和特殊轴测法；在所有这些情况下，框架与三个坐标轴中的一个平行，具有明显的执行优势。
事实上，骑兵轴测法使元素的投影与图片保持平行不变，因此被广泛用于技术制图和手册中，以表示技术元素的形状。
如果框架是水平的（军事轴测法），则平面图保持不变，这对表现建筑和领土非常有利。另一方面，特殊轴测法是一种极少使用的特例，它生成的图像非常扁平，在空间形式上很难辨认。

绘图中的线条粗细

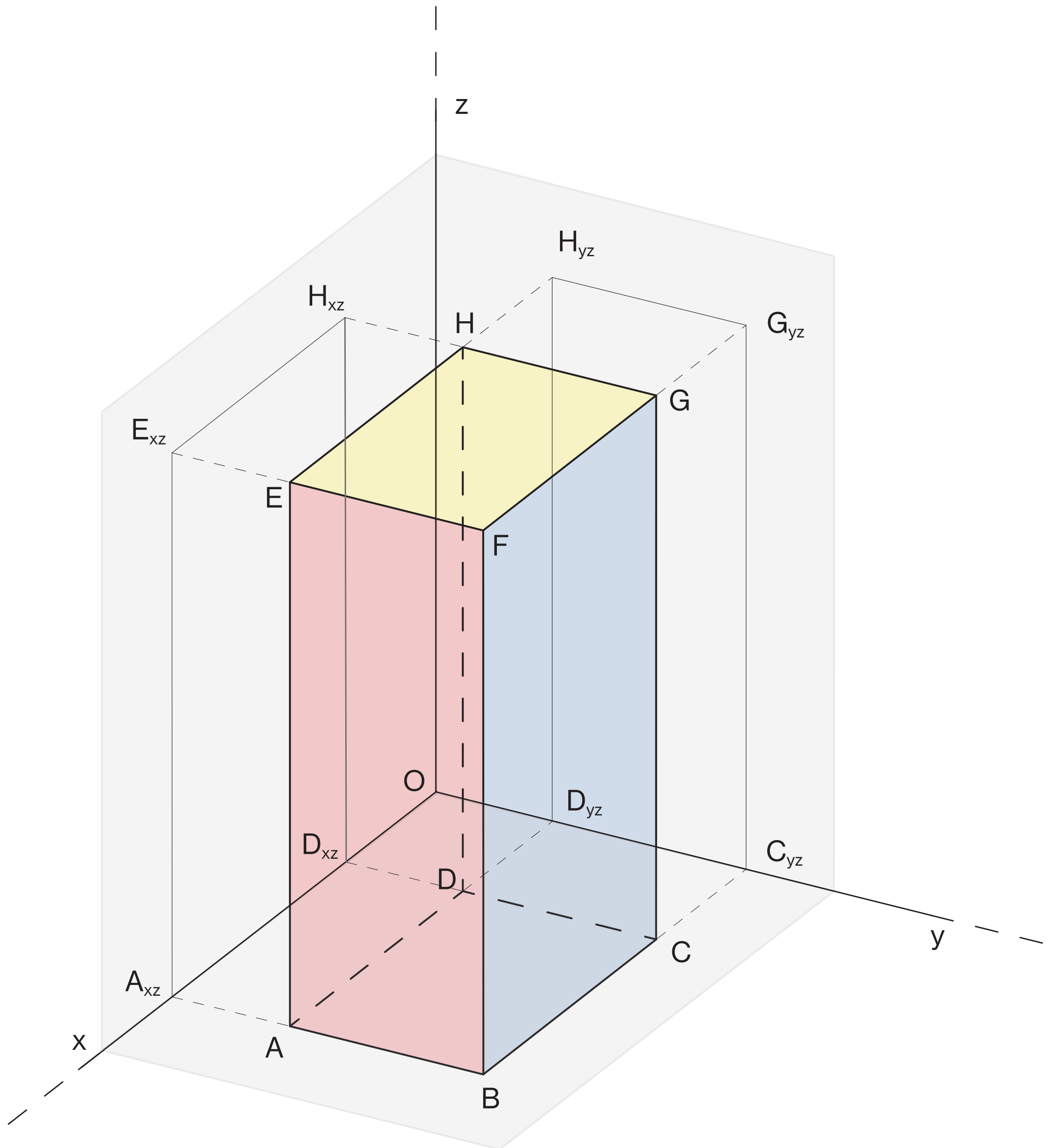
用于正交投影的粗线和用于轴测图中视图边缘的粗线

细线表示轴测法所示图形的正交投影

笛卡尔轴平均线

粗虚线表示轴测图中不可见的边缘

建筑线条的细虚线

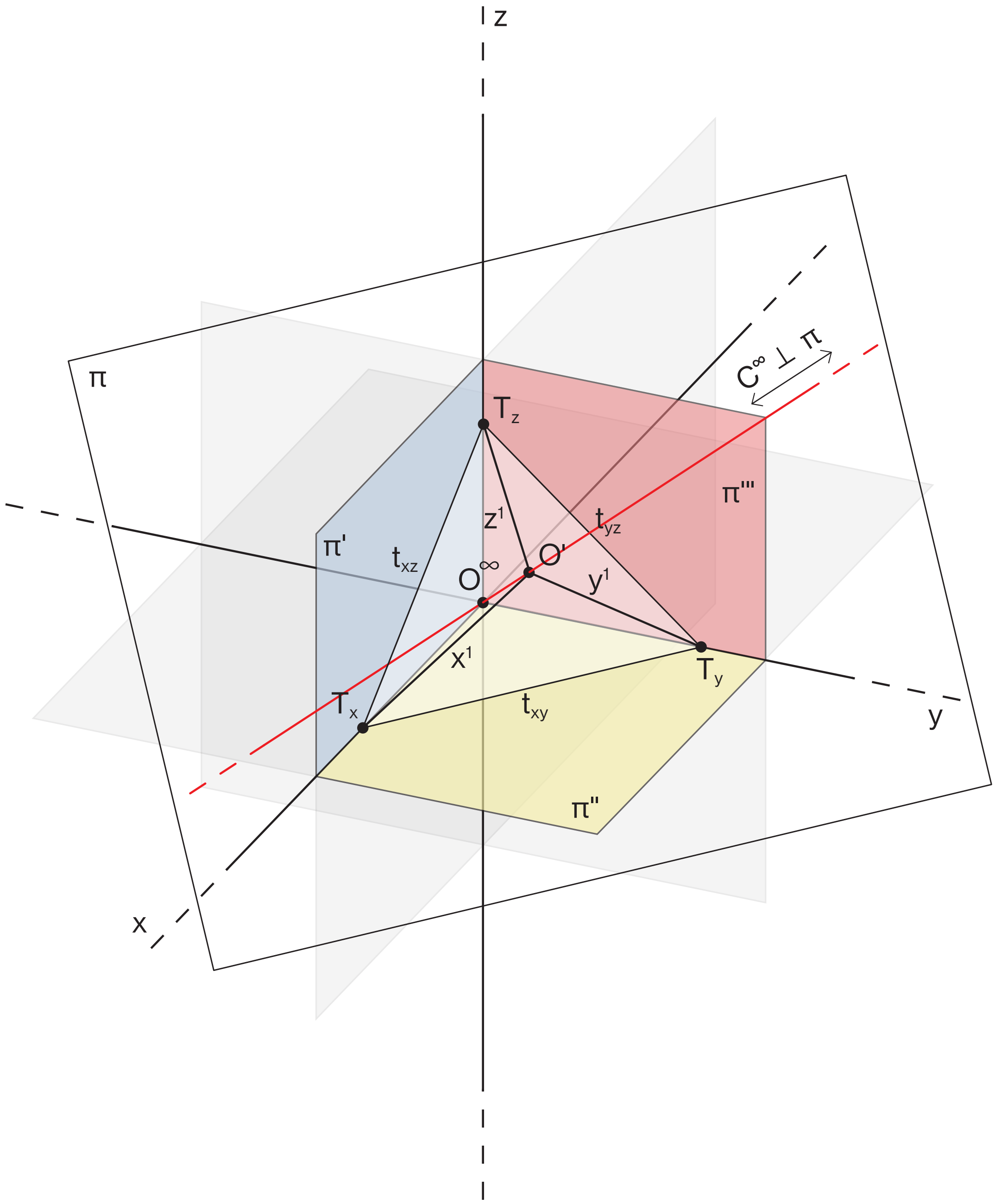


3.2 投影表示法的要素

轴测法是指从不规则中心 C∞ 沿正交或斜交方向平行投影到投影面 π（称为框架）上。
空间参照将空间中的点与三条正交笛卡尔轴 x、y、z 联系起来，这三条轴是由三个坐标参照平面（π1、π2、π3）的交点产生的，它们与空间中的点一起投影到 π 平面上。
无论 C∞ 的方向如何，三个直角坐标平面（π1、π2、π3）与框架（π）的交点（tx、ty、tz）都是轨迹三角形（始终相切，且顶点为 Tx、Ty、Tz）的边，在这个三角形中，原点 O 被投影到 O'。
如果投影方向（C∞）与 π 正交，则 O 在轨迹三角形的正中心投影到 O'中，我们将得到正交轴测法；如果投影方向是斜的，则它投影到 O' 以外的 O0 中，我们将得到斜轴测法。
物体相对于直角坐标系的排列方式可以任意选择，但主要边缘平行于 x、y、z 轴的排列方式更为方便。

投影方向和 π 框位置的选择也是自由的，但实体在空间中的相互定位的各种可能组合对表示物体的角 度和度量特征起着决定性作用，因此绘图的效果取决于空间方向的选择，事实上正交轴测图和骑马轴测图都会用到。

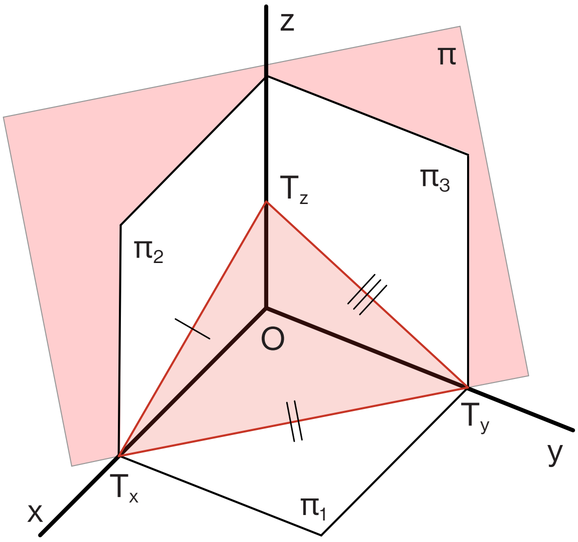
总而言之，构建轴测图的基本要素包括
1. 正交轴 x、y、z 的三元组，定义三个正交平面 xy ≡π1，xz ≡π2，yz ≡π3。
2. 跟踪三角形总是正三角形。它划定了框架与三个坐标平面的交点，可以测量平面在空间中的位置。
3. 一个称为框架（π）的平面，空间中的 x、y、z 轴都投影在这个平面上。为简单起见，框架与绘图纸重合。
4. 一个投影方向，将笛卡尔坐标轴系以原点 O'为中心，按 x'、y'、z'投影到框架上。


z
π
$C^\infty \perp \pi$
T_z
π'''
t_{yz}
z^1
π'
t_{xz}
O^∞
O'
y^1
x^1
T_x
T_y
t_{xy}
y
π''
x

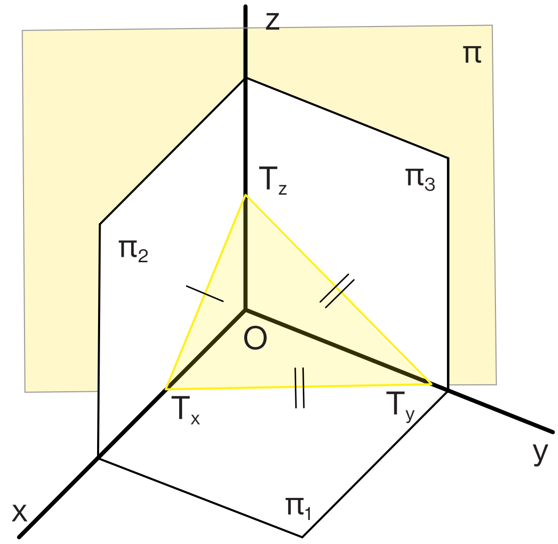
3. 解析几何

轨迹三角形

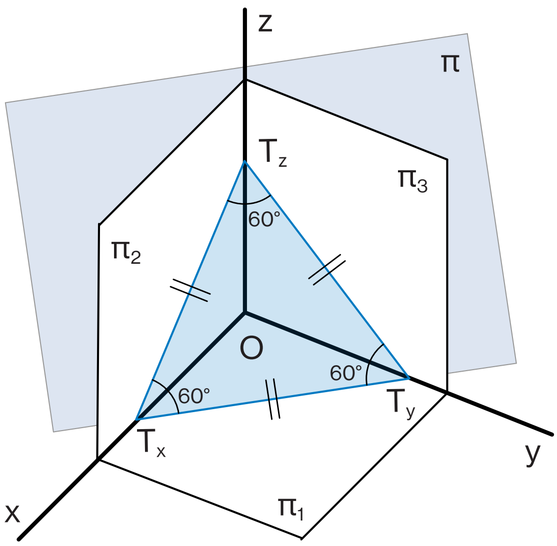
轴测法也被称为平行透视法，因为当π框架相对于参考轴旋转时，它能够将三维空间视觉化，而不会失去平行性。
投影空间是连续和均匀的，因此我们可以想象旋转π框架，让物体相对于参考轴静止不动，一旦框架固定下来，相对于三个笛卡尔轴旋转单个不适当中心的方向，将中心投影到相对于它们的一个通用平面上。这将改变轨迹三角形的形状和三个轴测轴的方向（笛卡尔三轴的投影）。
直观地说，C∞ 与 π 正交时的图像类似于放置在一般平面上的物体的投影图像。轴测法有一个不适当的中心，也能保持平行，由于投影以三个正交轴 x、y、z 为基准，并有共同的原点 O（笛卡尔轴），因此称为轴测法。
相对于 x、y、z 轴旋转框架 π 会改变轨迹三角形的形状，而轨迹三角形总是渐开线的（两个正交平面与第三个斜面的交角总是小于 90°），可以是等边三角形、等腰三角形或等边三角形。因此，在三个直角坐标轴上分别有 3、2、1 个不同的单位。
由于它是一种经过数学论证的科学方法（所有投影都有数学基础），即使与其他方法相比有相当大的延迟，只要我们知道投影中心 C∞ 的方向，即笛卡尔三元组原点 O 的投影 O'相对于三个轴 x、y、z 在框架 π 上的轨迹（轨迹三角形的顶点）的位置，就可以解决所有测量和建筑问题。
如果 C∞ 垂直于框架，也只有在这种情况下，O'才与三角形本身的正中心（高的交点）重合；在所有其他情况下，O'将位于不同的点，但总是在轨迹三角形的内部，而根据构造，轨迹三角形总是正三角形。知道了轨迹三角形，就可以确定三个正交轴上的单位偏移量，并测量空间中相对于它们的任何一点。
相对于 O.P.，倾斜和测量相对于三个直角坐标轴旋转的元素的操作不那么容易和直接，因此轴测法主要用于根据参考轴定向的体的体积可视化，在此基础上很容易确定轴测单位 ux、uy、uz 在三个轴上的投影偏移。
根据框架的位置和中心的方向，各轴相对于框架的角度会发生变化，因此 x'、y'、z'相对于笛卡尔三元组投影原点 O' 的旋转也会发生变化，因此必须为每个轴确定测量单位的前缩短。



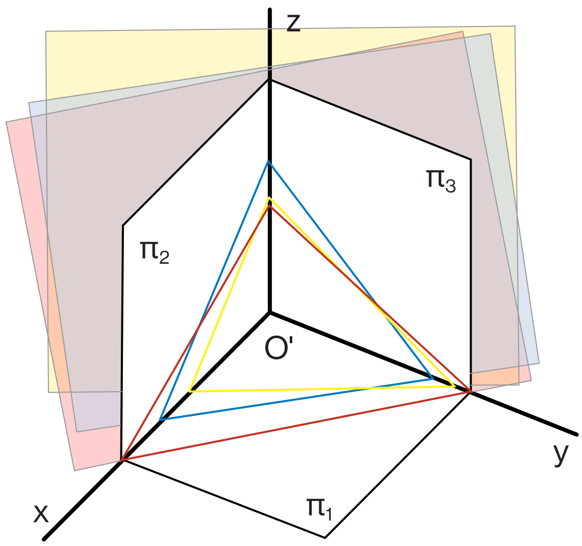
三轴测量



二轴测量



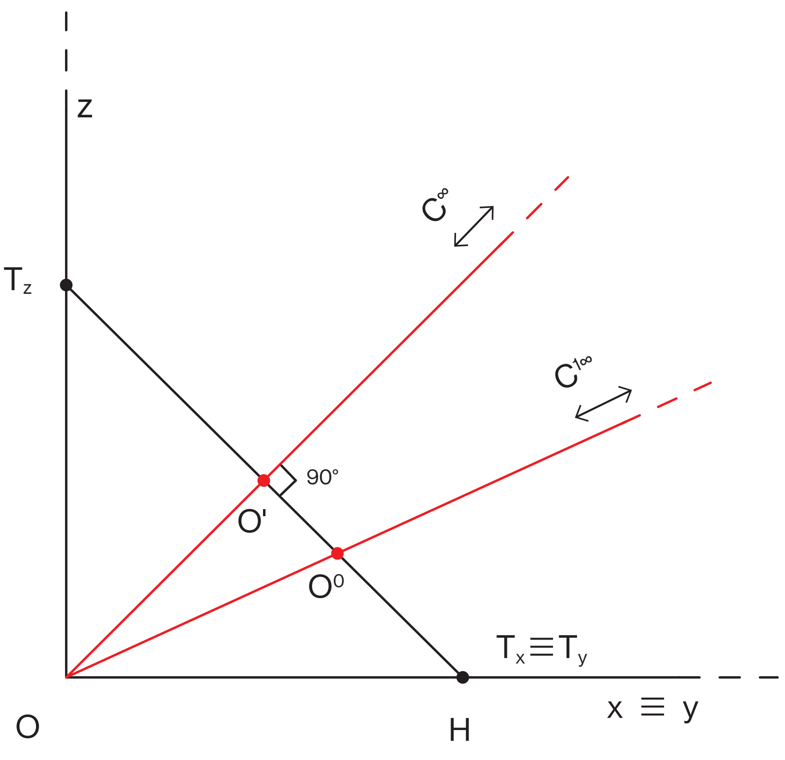
单轴测量



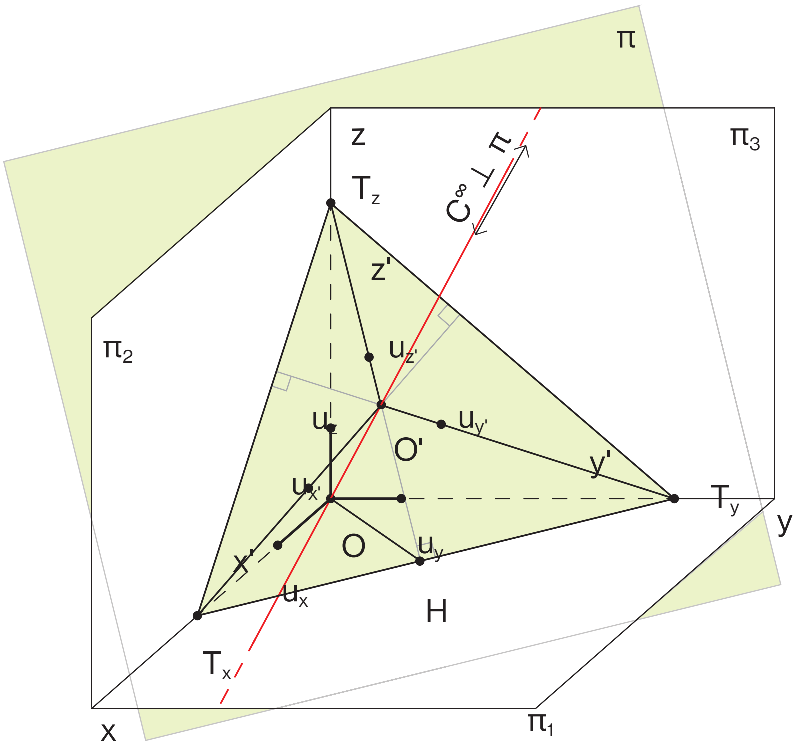
3. 解析几何

基本三角形和中心方向

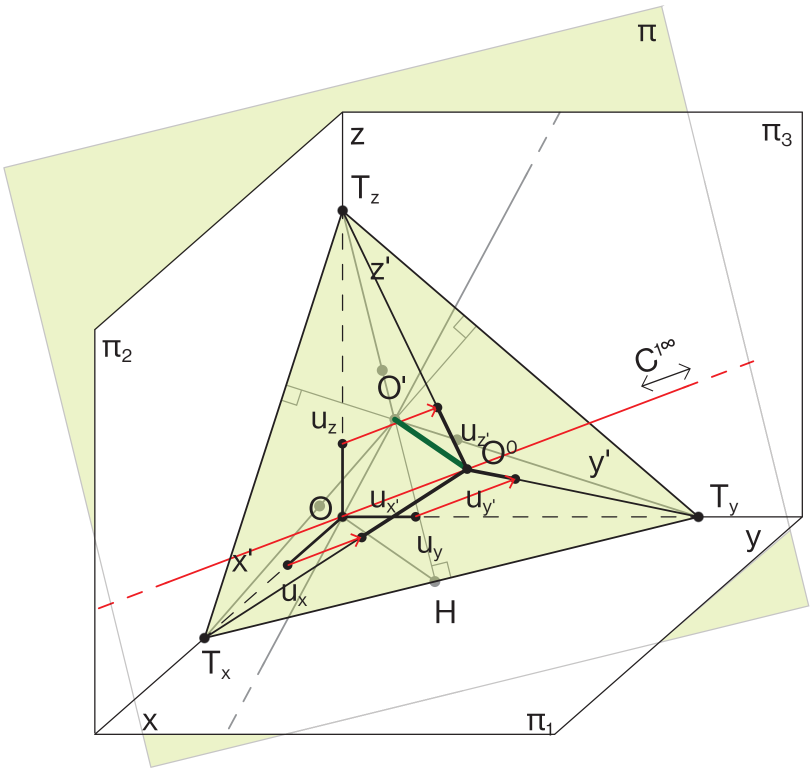
在项目设计中，P.A.的 "幸运 "与它 "直接 "构造的速度有关，当已知（三条轴上的）ux、uy、uz 的轴测单位时，参照空间基本三面体的三条正交轴，对三条轴的轴测单位进行预定的算术修正，根据表示的需要（物体的形状和最感兴趣的元素的位置）选择轴的方向后，就可以用图形获得。
如果投影中心与框架 π 正交，则原点（O'）的投影位于轨迹三角形三条高的交点上，因此与正交中心重合。如果投影中心相对于 π 倾斜，则投影 O0 位于轨迹三角形的内部，但不与正中心重合。
如果我知道迹线三角形和轴的投影，那么无论 C∞ 的方向如何，我都可以推导出三个轴上的轴测单位 ux、uy、uz。
在 C∞ 与 π 正交的情况下，参考系原点的 O'投影与轨迹三角形（高的交点）的正中心重合。
如果 C∞ 是斜的，则三条轴测轴线与三角形的高不重合，但我仍然可以确定轴测单位。
除骑兵轴测法的特殊情况外（见 3.4），不使用斜轴测法。



投影方向倾斜度的比较


π
z
π3
Tz
C∞ ⊥ π
z'
π2
uz'
uy'
uz
O'
y'
ux'
Ty
y
O
uy
x'
ux
H
Tx
x
π1

正交轴测法


π
z
π3
Tz
z'
π2
C1∞
O'
uz
uz'
O0
y'
O
ux'
uy'
Ty
y
x'
uy
ux
H
Tx
x
π1

斜轴测量

3.3 正交轴测图法

在正交轴测法中，与框架 π 正交的投影中心固定了与轨迹三角形正中心重合的 O' 的投影。此外，还配置了与一般平面上的蒙氏投影（三高交点）类似的投影条件。
在平面和框架的倾斜度和布局与投影面既不平行也不正交的情况下，并不总是能够确定轨迹三角形和三轴测量单位的前缩短。

角度配置

在投影平面 π 上，三条轴线的前缩取决于 π 与每条轴线之间的夹角，因此三条轴线（以及空间中的其他方向）的缩减比各不相同。可以通过倾斜框架上的轴来确定三个轴的缩减比，同样，也可以倾斜框架上的任何其他方向。

根据框架 π 的位置以及轨迹三角形的形状，可以出现三种情况：

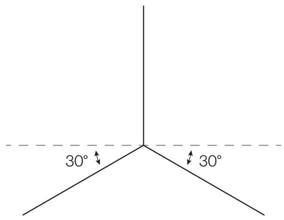
– 等角轴测图，此时轨迹三角形为等边三角形，三个正交轴的投影相等，轴之间有三个 120° 的扇形，各自的轴测单位 ux、uy、uz 缩短。

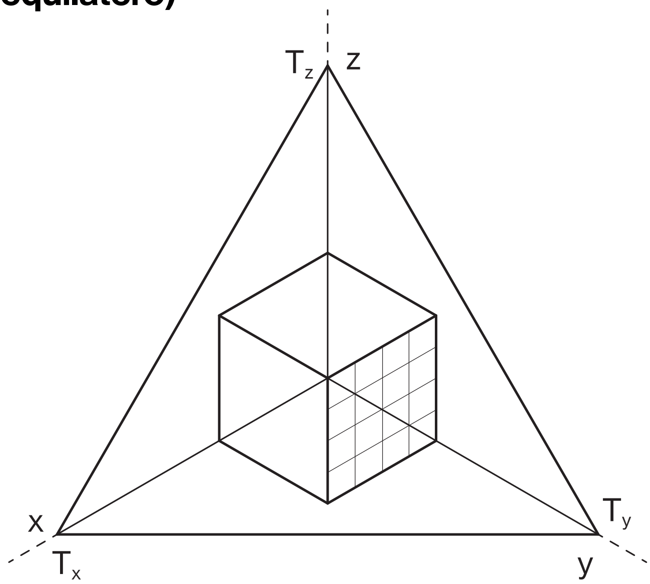
– 双轴测图：当轨迹的三角形为等腰三角形时，轴和框架之间的三个角中有两个角的大小相同，各轴测单位的变形值也相同。

– 三轴测图：当轨迹三角形为不等边三角形时，轴和框架之间的夹角不同，相对测量单位 ux、uy、uz 也不同。

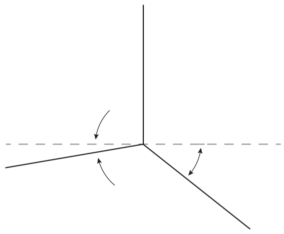
等角轴测图（等边三角形）
Isometrica (triangolo delle tracce equilatero)

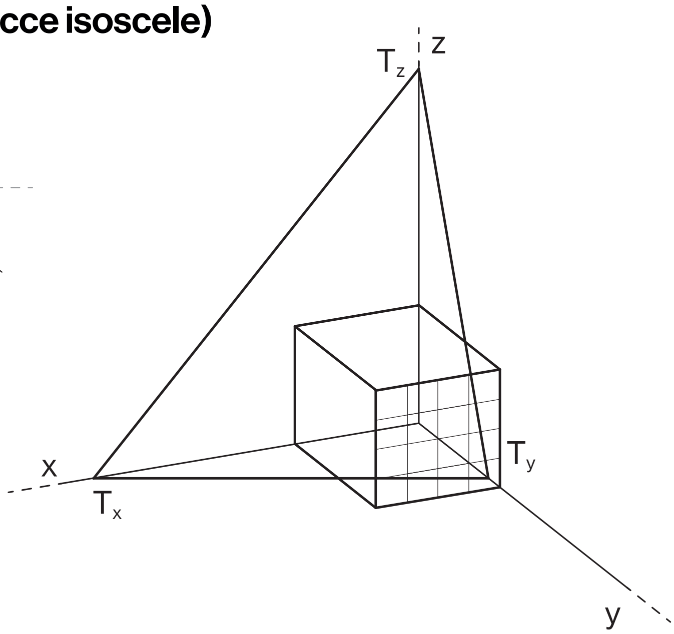
$u_x=u_y=u_z$



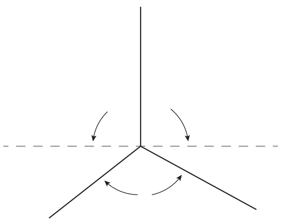


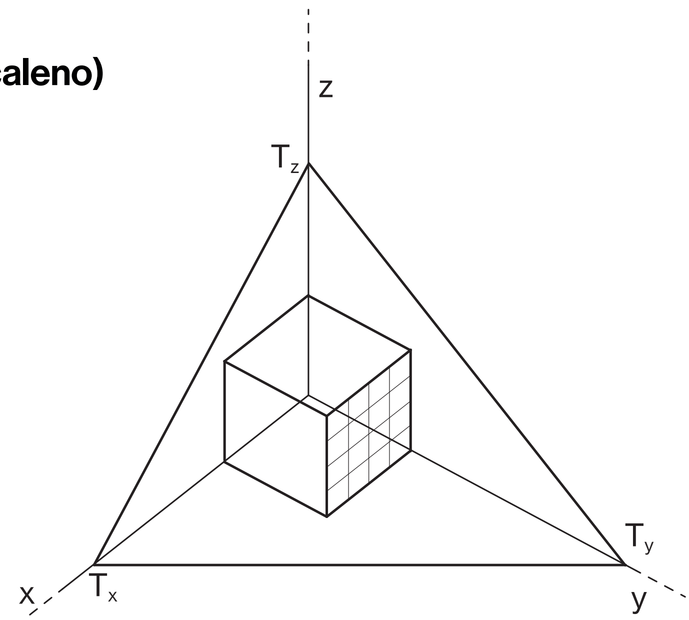
双轴测图 （等腰三角形）
Dimetrica (triangolo delle tracce isoscele)





三轴测图 （不等边三角形）
Trimetrica (triangolo delle tracce scaleno)





3.4 轴测单位

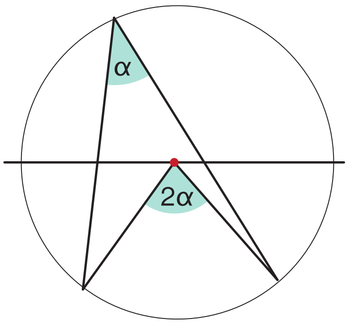
三个坐标轴上的轴测单位总是小于实际（按比例）测量单位。缩小比可以通过图形或分析找到。事实上，有一些预先计算好的表格，可以根据轴的方向以及它们在 π 上的投影之间的夹角来显示轴测比，而图形法则需要逐个确定。
图形法无需计算即可轻松求解，包括两个连续步骤：
a) 通过确定轨迹三角形来确定框架与基本三面体的交点
b) 通过倾斜框架上的坐标轴来确定还原比。

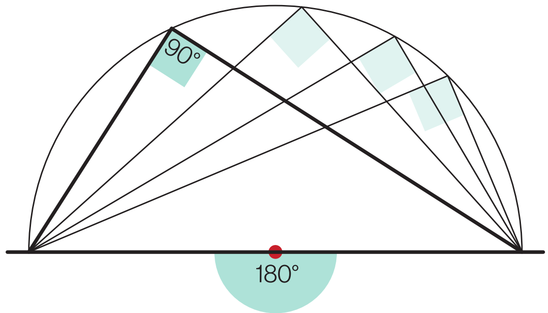
框架与基本三面体的交点

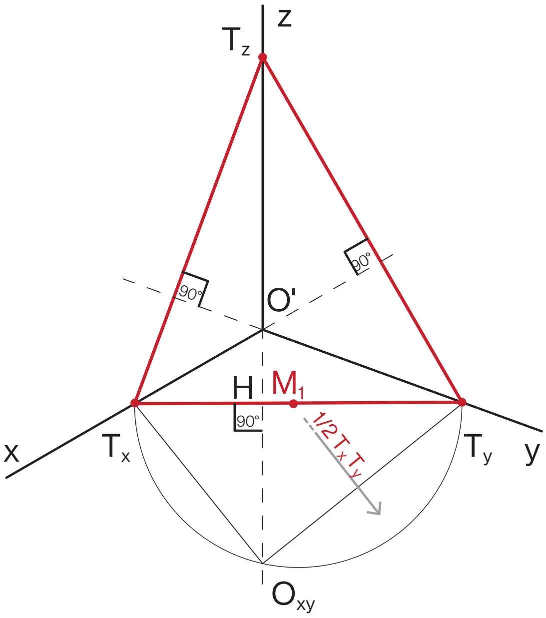
如前所述，根据我们为三个轴所选择的方向以及轨迹三角形的形状，我们可以得到单轴（等边三角形）、二轴（等腰三角形）或三轴（不等边三角形）正交轴测法。
如果轴测法是正交的，那么很容易证明轴的原点与轨迹三角形的正中心（高的交点）重合。因此，要绘制任何正交轴测图，只需选择任意一个轨迹三角形，确定其正中心的位置，然后绘制笛卡尔三面体的轴线，或者绘制轴线，然后确定三个坐标平面的轨迹，使原点位于轨迹三角形的正中心。
要确定正中心的位置，必须追踪从边出来并与对边正交的直线，即高。

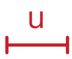
求缩小比

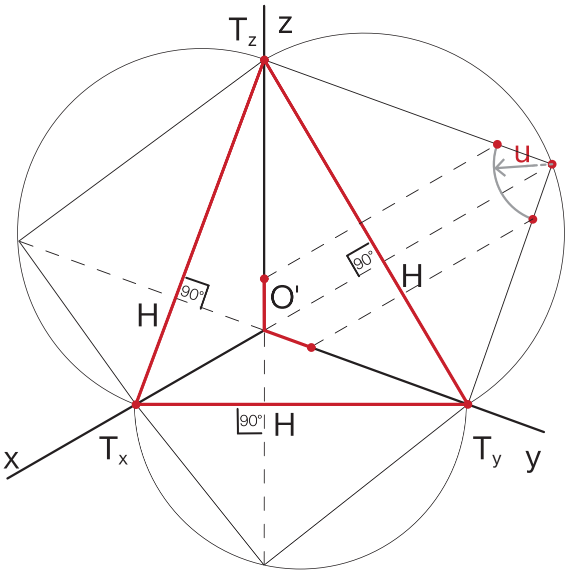
根据三面体，轴测框架将三个直角坐标平面简化为三个直角三角形，在 O'中为直角，在投影中为钝角。这些三角形的轴心分别属于投影后缩短的 x、y、z 轴，而三个斜边 Tx Ty、Ty Tz、Tz Tx 则属于轴测框架 π，因此保持了真实维度。要找到缩小比，只需在轴测框架上翻转三个三角形，以斜边 Tx Ty 为旋转轴，绕斜边翻转 xy 平面，即可得到猫眼的真实尺寸。
在其上构建一个 Oxy 直角三角形，并以直径 Tx Ty 为半圆的内切圆。所选的测量单位 u 被绘制在轴上，这样就可以通过将实际单位放置在与三角形斜边正交的轴上来确定相对的轴测单位。为了确定三个坐标轴上的测量单位，有必要也有足够的理由在 π 框架中将其翻转过来。某些几何方面的考虑为这种翻转提供了便利。事实上，我们可以观察到，由轴线和它们之间的平面轨迹所定义的三角形都是矩形，在每个轴线的投影平面上所定义的三角形，其与框架和相反平面的轨迹也是矩形。因此，考虑到中心角是圆周角的一半，通过在要翻转的平面的轨迹上构建半圆，很容易确定翻转。 在正交轴测法中，只需知道 O 与 π 的距离和两条轨迹，即可确定第三条轨迹。

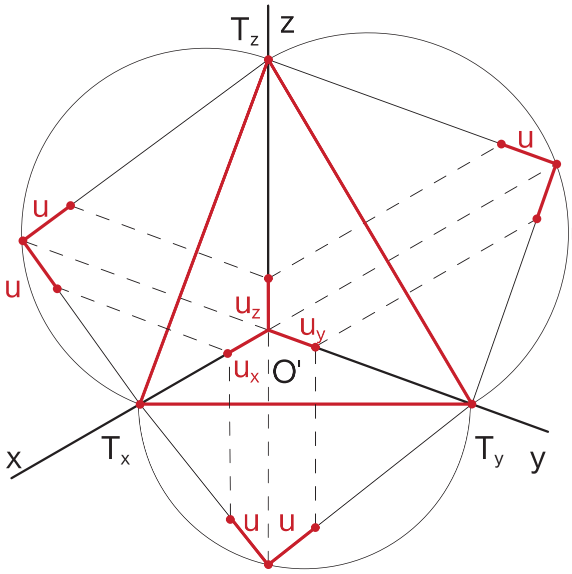


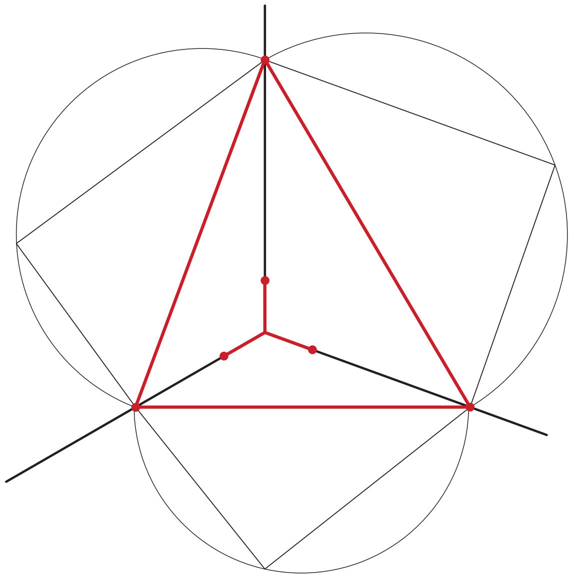












3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6

3.5 骑士轴测法

在骑士轴测法中，C∞ 的方向平行于笛卡尔平面之一，因此轨迹三角形是不确定的，但笛卡尔参照系（以及物体本身）的布置有两条平行于 π 平面的轴线，这样做的好处是使物体与框架平行的某些平面保持不变。这些特殊的轴测几何法被称为骑士轴测几何法，由于其实现的直接性，在技术制图中被广泛使用，但不允许进行测量操作，因为轨迹的三角形仍然是不确定的，因此无法确定斜轴的倾斜度。
由于在骑马轴测法中，框架总是平行于三个笛卡尔平面中的一个，因此我们会发现，在平行于框架的两个轴上，轴测单位总是相同的，而第三个轴的轴测单位取决于投影方向的倾斜度，只有在某些情况下才能确定。
因此，一般来说，骑马轴测法从来都不是三测法，根据投影方向是水平还是垂直，有两种不同的情况。
在骑马轴测法中，C∞ 的方向是垂直的，因此水平面不会发生任何变形，无论是角度变形还是度量变形，因此该图像特别适合于表现建筑和地域。同样，也可以将建筑物的垂直平面平行于 π 框架进行排列，从而获得一种轴测法，在这种轴测法中，正面垂直平面的表示与正面立面相吻合（骑兵轴测法）。

– 卡瓦略轴测法，当框架垂直时，一般为斜二轴测法，第三轴上的缩减比只有在特殊情况下才能确定；特别是，如果投影和第三轴与框架成 45° 倾斜，则第三个轴测单位相对于其他两个轴测单位减半；

– 军用斜轴测图或军事骑射法是一种斜单测轴测法，其框架是水平的，投影中心是垂直的。因此，x–y 轴之间保持正交，但相对于 z 轴是倾斜的。

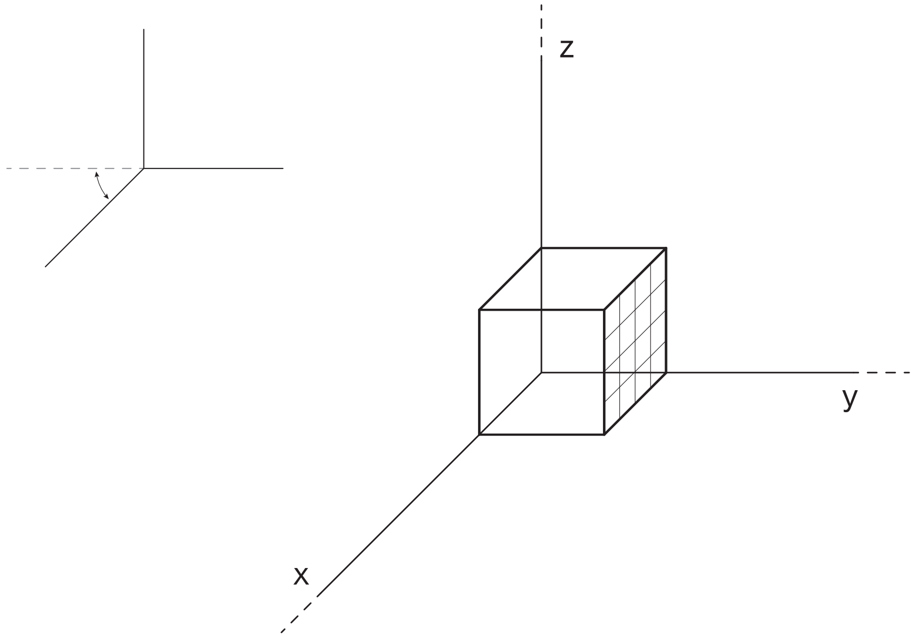
只有当第三轴与框架成 45°倾斜时，该轴的减速比才是已知的（1/2u）。
在所有其他情况下，可根据波尔克定理任意选择。

斜二轴测图
Cavaliera dimetrica

还原系数：

$u_y = u_z$

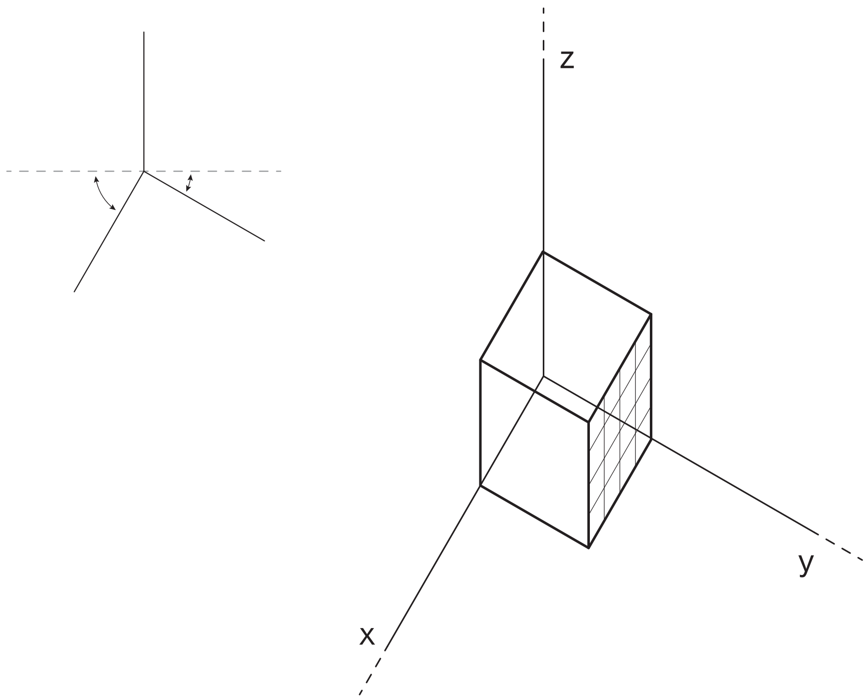
$u_x =$ 任何



军用斜轴测图（单轴测图）
Cavaliera Militare (monometrica)

还原系数：

$u_x = u_y = u_z$



3.6 波尔克定理

波兰数学家 K. Pohlke 因怀疑三个正交轴的平行投影现象的合法性而阐述了对轴测投影技术应用具有重要意义的定理。波尔克（K. Pohlke）提出了一个对轴测投影应用于技术表示具有根本重要性的定理。考虑到那些有经验证明在几何层面上也是合理的投影，他建议找到这样的条件，即在投影平面π上任意指定相等且正交的三段ux、uy、uz后，可以产生斜投影的三段u'x、u'y、u'z。"在框架 π 上选择从同一点 O'出来的任意长度和方向的三条线段 u'x、u'y、u'z，总是存在一个不适当的投影中心，该中心由不适当中心 C 的方向确定，因此可以将它们视为从不适当中心 C 的方向，三条长度相等的线段 u，两两垂直地在 π 上的投影"。这意味着，无论它们的方向如何，三条单位线段 u'x、u'y、u'z 都可以从相对于框架的斜方向正确地表示立方体的边，只要放弃确定投影元素来解决其他测量问题，而对于这些问题，总是需要知道中心的方向和轨迹的三角形，这在粗略的轴测法中是不确定的。
在很长一段时间里，该定理仍然是一个没有投影证明的陈述，直到上个世纪才得以实现。

3.1
3.2
3.3
3.4
3.5
3.6

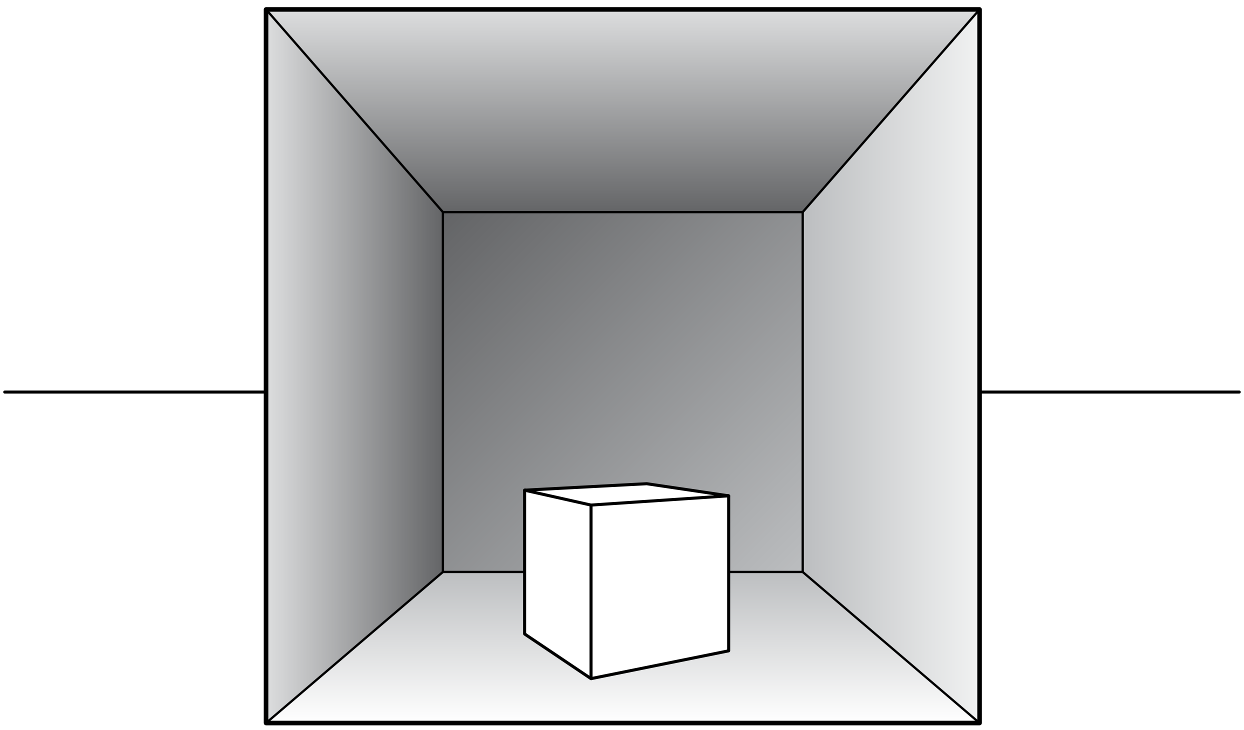
4. 透视

4.1 导言

线性透视是一种基于严格几何规则的图形构造，它可以
它的发现标志着文艺复兴的开始。
线性透视法由 14 世纪托斯卡纳画家的经验研究发展而来，并于 1414 年由菲利波–布鲁内莱斯基（Filippo Brunelleschi）实证证明。
1413 年，菲利波–布鲁内莱斯基用两幅著名的壁画证明了这一点，这两幅壁画分别描绘了圣乔瓦尼洗礼堂和维琪奥宫。
和佛罗伦萨维奇奥宫的两幅著名壁画，分别描绘了正面和角落的景象。
在所有投影表现方法中，透视法最早在 15 世纪皮耶罗–德拉–弗朗西斯卡和莱昂–巴蒂斯塔–阿尔贝蒂的论文中被正式编纂。
文艺复兴时期的画家不懂投影几何，也没有点的概念。
文艺复兴时期的画家不懂投影几何，也没有解释平行线共同飞行意义的 "不适当点 "概念。
他们使用的程序基于皮耶罗描述的 "切割法"（视觉光线与透视窗的交点、
或阿尔贝蒂提出的简略结构、
阿尔贝蒂提出的简略结构，这种结构预示着测量点的方法。
透视法简化了单眼视觉的过程，将视网膜表面上的投影替换为薄片平面上的投影，因此称为线性透视法。
事实上，从眼睛的生理学角度来看，视觉图像是在一个类似球体的表面上形成的，而在透视图中，图像是平面的。因此，几何结构更接近于摄影而非视觉。
古人曾试图用圆柱面来限制莱昂纳多所强调的横向像差，但未能成功。
(E. Panowsky）。

透视一词源于拉丁语 perspicere，意为看清，或更可能源于 prospicere，意为通过置于眼睛和物体之间的 "窗口 "向前看，这与绘画中的 "窗口 "相似，它使观察者的眼睛与所表现物体的显著点之间的视觉光线相交。
物体在场景中的位置和透视变量通过正交投影来描述
因此，透视也被称为应用透视。

从投影的角度来看，透视图像是一种与人类视觉同化的中心投影，其中的投影系统指的是一个被称为几何平面的水平面 π'，投影框架 p 的方向和中心 V 的位置与观察者的眼睛重合。
与观察者的眼睛重合。
投影使空间中所有点的严格（数学）表示成为可能。
(适当的和不适当的）空间中所有点的严格（数学）表示，现实与其图像之间具有双单义对应关系，从而可以从图像反向确定其元素的确切位置（简单的摄影测量）。光学遥感仪器就是基于这一假设。



4.2 透视变量

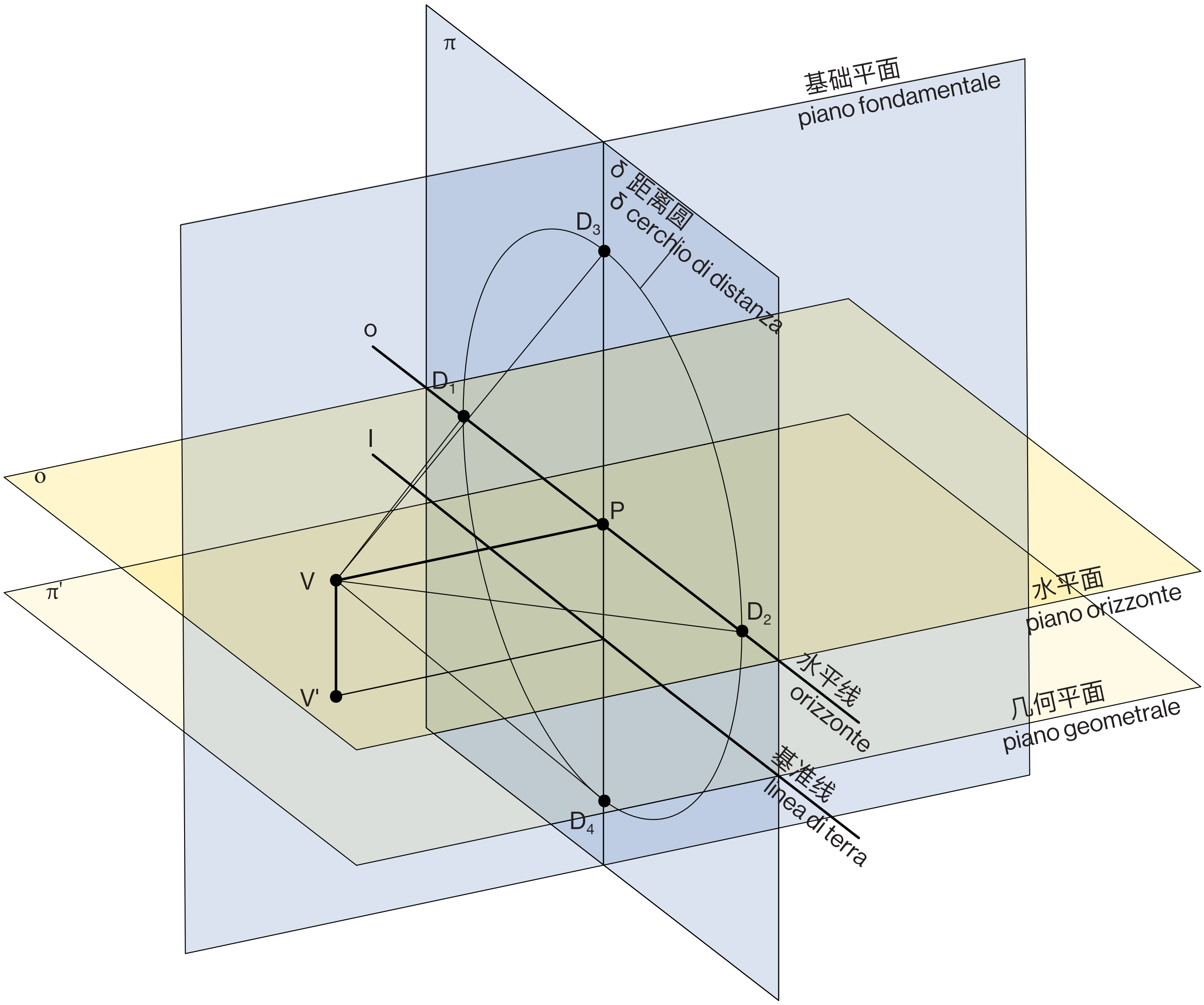
透视图像由中心 V 相对于画面 π 的位置和注视方向定义。
由始终与框架 π 成正交的主光线表示, 介于场景和观察者之间。
和观察者之间的主光线所表达的, 它决定了观察者在空间中的位置 (相对于参考平面的角度
水平 π') 。
这两个基本变量是相对于被称为几何平面的水平参考平面 π' 而定义的。
被称为几何平面的这两个基本变量的基础上, 所有其他有助于构建场景透视图像的几何元素
所有其他几何元素都有助于构建场景的透视图像, 并保持真实场景与其表现形式之间的双单义对应关系。
及其表现形式之间保持双向一致的对应关系。以水平几何平面π'为基准, 相对于它
在正交投影中定义透视图中所有元素的位置。
从自变量开始, 到派生的参考元素, 最后确定透视图中要表现的元素。
在绘图中的表现。

独立变量

– 视点 V: 是投影中心, 表示从哪个点观看物体、
即观察者的眼睛, 由其位置和注视方向决定、
即光轴方向 (主方向) 。

– 帧 π 的位置: 其位置由 V 和 π 之间的主距 (= 垂直于 π 的线段 VP
和 π 在空间中的位置 (与水平参考平面 π'的夹角, π'相当于脚步平面, 也称为几何平面。
框架 π 是进行投影/绘图的平面, 它始终位于观察者和物体之间, 就好像是观察者和物体之间的平面一样。
它可以是垂直的 (垂直平面透视) , 也可以是倾斜的 (理性透视) 。
或倾斜 (理性透视) 。

V 相对于场景的位置是固定的, 它决定了物体相对于光轴的角度, 因此也决定了物体可能出现的变形, 增加或减少画框与物体的距离不会改变透视, 只会改变图像的大小。透视的所有其他参考元素都已定义。
正交投影可以作为预备图单独绘制, 也可以直接绘制
将画面上的视点 V 和几何图形 π1 对调, 即可获得透视效果。


π
基础平面
piano fondamentale
δ 距离圆
δ cerchio di distanza
D3
o
D1
I
o
P
π'
V
D2
水平面
piano orizzonte
V'
水平线
orizzonte
几何平面
piano geometrale
基准线
linea di terra
D4

4. 透视

参考元素（取决于变量）：

– 水平面 o: 穿过 V 的水平面, 位于观察者的视平面;

– 地平线 o: 地平线平面与框架的交线, 水平面的飞行;

– 基面: 垂直于框架的平面, 通过 V;

– 主点 P: 主光线 (光轴) VP 与框架 π 的交点、
消失深度线 (垂直于 π 框架的线)；

– 距离圆 δ: 以 P 为圆心, VP 为半径的 π 上的圆周, 与 π 成 45°倾斜的直线的交点处。
与 π 成 45°, 并确定地平线上的四个距离点 D1、D2 和主垂直线上的 D3、D4。
为 V (分别为水平线和垂直线的连接点)；

– 视圆 ρ: 中心为 P、半径为 VP 的视锥与 π 的交点圆周。
内, 图像不会发生畸变 (孔径约与光轴成 30°)；
因此必须包括看到物体的视锥;

– 地线 l 或 lt: 几何平面的轨迹, 它是π'和框架π.之间的交点线、
的交线, 平面本身可以围绕这条线倾斜;

– 站点 V': V 在 π' 上的垂直投影, 代表观察者所在的点。

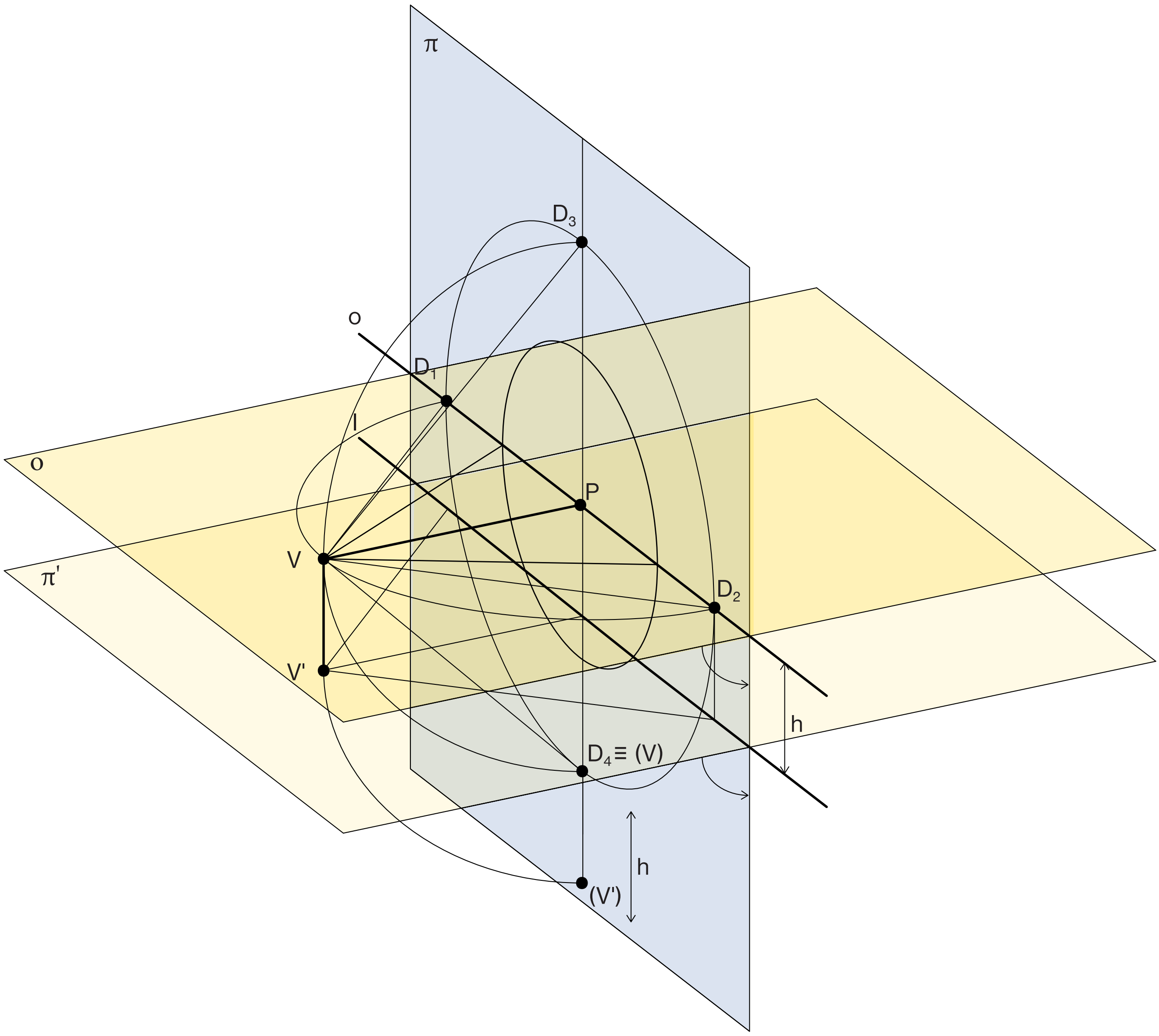
– 高度 h: 地面线与地平线之间的距离, 即 V 与 V'之间的距离, 表示观察者眼睛的高度。

– Fugue Fr: 与给定直线平行的所有直线的不适当点, 它是与经过 V 的直线 r 的平行线的交点; 与框架平行的所有直线的不适当点, 它是与经过 V 的直线 r 的平行线的交点。
的交点; 所有平行于框架的直线都有不适当的消失点。

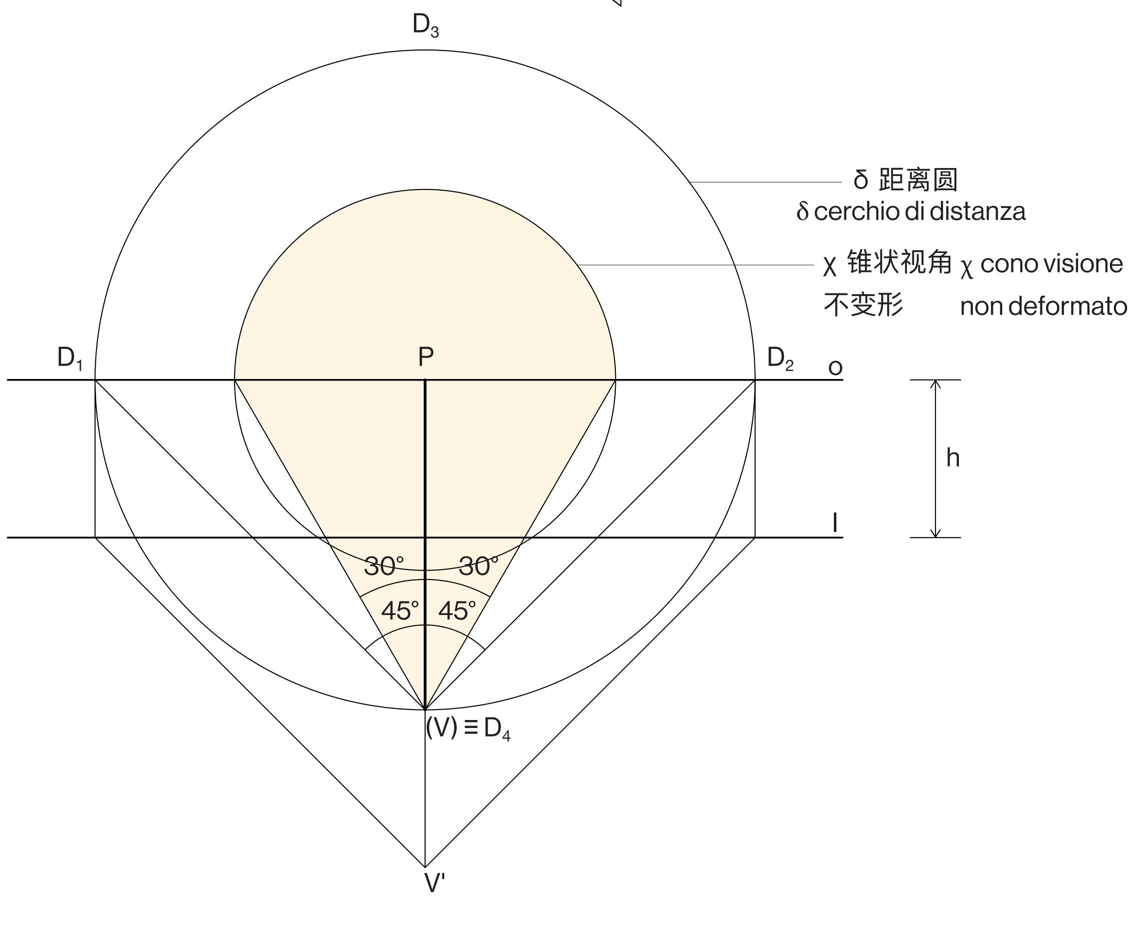
– 轨迹 Tr: 直线 r 与框架的交点, 是投影图像 (透视图) 与真实点重合的连接点。

将轨迹和线段连接起来, 就能描出透视图; 两条线段的交点决定了点的位置。通过这种方式, 重复同样的操作就可以绘制出任何图形。

与直线类比, 平面的轨迹在与图形的交点上, 而消失则在 V 所引导的平行平面的交点上。
根据隶属关系, 属于平面的直线的消失和轨迹分别属于平面的消失和轨迹 (反之亦然) 。



π
o
D3
D1
l
o
P
V
π'
D2
V'
h
D4 ≡ (V)
h
(V')



D3
δ 距离圆
δ cerchio di distanza
χ 锥状视角 不变形
χ cono visione non deformato
D1
P
D2
o
h
l
30°
30°
45°
45°
(V) ≡ D4
V'

4. 透视

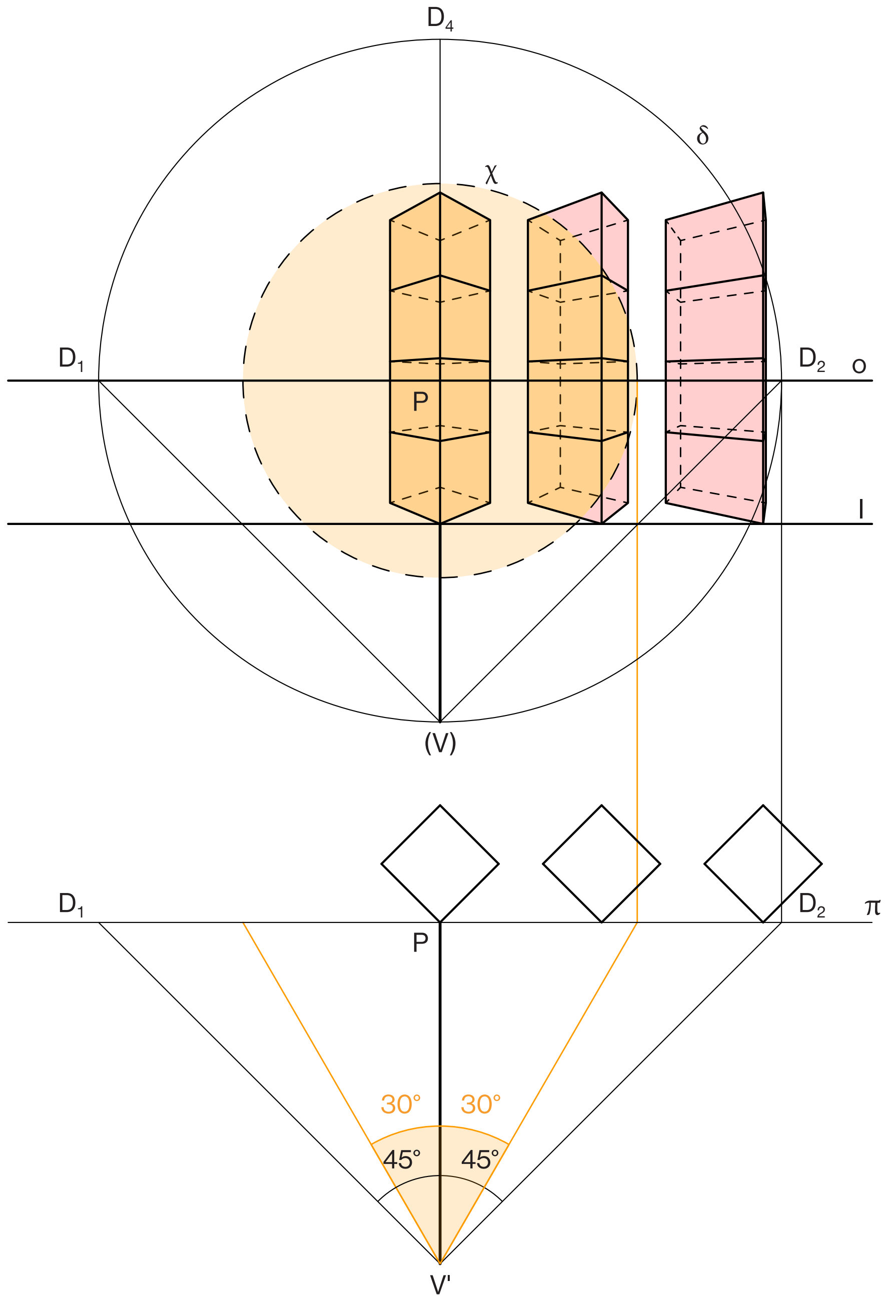
由于绘制一条直线只需连接其两个点，因此轨迹和连接点足以绘制任何直线的透视图。
但特定的线和平面很快就能确定，因为它们的消失点是由上述要素决定的，特别是
– 平行于光轴的纵深线的消失点在 P 处、
– 水平线的消失点在地平线上、
– 与框架成 45° 倾斜的水平线在距离 D1、D2 处有消失点、
– 与几何图形成 45° 倾斜的水平线在距离点 D3、D4 处有消失点、
– 与画框成 45° 倾斜的水平线在距离圆上有消失点、
– 如果画作是垂直的，所有垂直线即使在透视图中也保持垂直，与地面线平行的线则保持水平。
与地面线平行的线条保持水平。如果画作是倾斜的，垂直线也会有自己的消失点。

画作相对于空间三条正交参考轴的方向决定了可识别的情况：
– 中心透视，正面空间，与画作正交的水平线在 P 轴上有一个主要连接点
– 意外透视图，P.的两侧有两个正交参考水平线的主要连接点、
根据倾角的不同，有固定的距离
– 合理透视（倾斜框架）：三个独立的连接点，用于三个主要参考方向。

与摄影一样，透视图最重要的是视点 V 的位置、高度和方向，以及视轴方向相对于水平面与所要表现的场景（空间和物体）的角度。
和物体）的角度。
如果轴线（= 主光线）是水平的，那么始终垂直于轴线的画面将是垂直的
这样我们就有了垂直平面透视法。
如果要获得无像差的透视图像，识别场景轮廓的视锥必须在整个 60° 的光锥范围内，在这个范围内
在此范围内，视网膜图像的变形无关紧要。
一般情况下，我们会尽量将视锥保持在 45–50° 左右，以便留出一定的余地。

重要的是要记住，验证也必须在高度上进行，而不仅仅是在平面上、
以避免顶部和底部的外角变形。

几何视角上的视点高度与地面线和地平线之间的距离相对应，必须与场景内部或前 方的假定观察者的静止状态相一致。一般认为，观察者站立时的眼高
一般认为，站立时观察者的眼高约为 1.70 米。
如果物体高出或低出很多，则需要将视点移开以保持画面垂直，或使用斜面透视法将轴线/画框向上或向下倾斜。
（三条平行于笛卡尔轴的直线的三个关节）。


D4
δ
χ
D1
D2
o
P
l
(V)
D1
D2
π
P
30°
30°
45°
45°
V'

4.3 基本实体的表示

空间中的点：

空间中的一个点 P 可以通过P'和一条经过P的直线唯一表示。

两条相交的直线会形成共同的交点，该点同时属于这两条直线。因此，两条共面的直线可以确定空间中的一个点，其透视点可以在这两条直线透视的交点中找到。

一般线：

空间中的一条直线 r 可以通过该直线上的两个特征点（Tr和Fr'）的图像r'来唯一表示。该图像通过直线与坐标轴框的相交点和直线的无穷远点（即直线的方向）来确定。

所有平行线共有一个无穷远点，因此它们的透视图具有相同的灭点，但有不同的轨迹。

所有平行于坐标轴框的直线的灭点在地平线上（水平平面的灭点）。

所有垂直于坐标轴框的直线的灭点在原点上。

垂直面：

平面α可以通过两条直线表示，即平面与坐标轴框相交的轨迹 tα 和定义其方向的平面的无穷远点的图像 fα'。

两个相交的平面会形成共同的交线，该直线同时属于这两个平面。因此，两个平面确定了空间中的一条直线，其灭点与两个平面的灭线交点相同。

平行平面共有一个虚交线，因此它们的透视图具有相同的灭点。

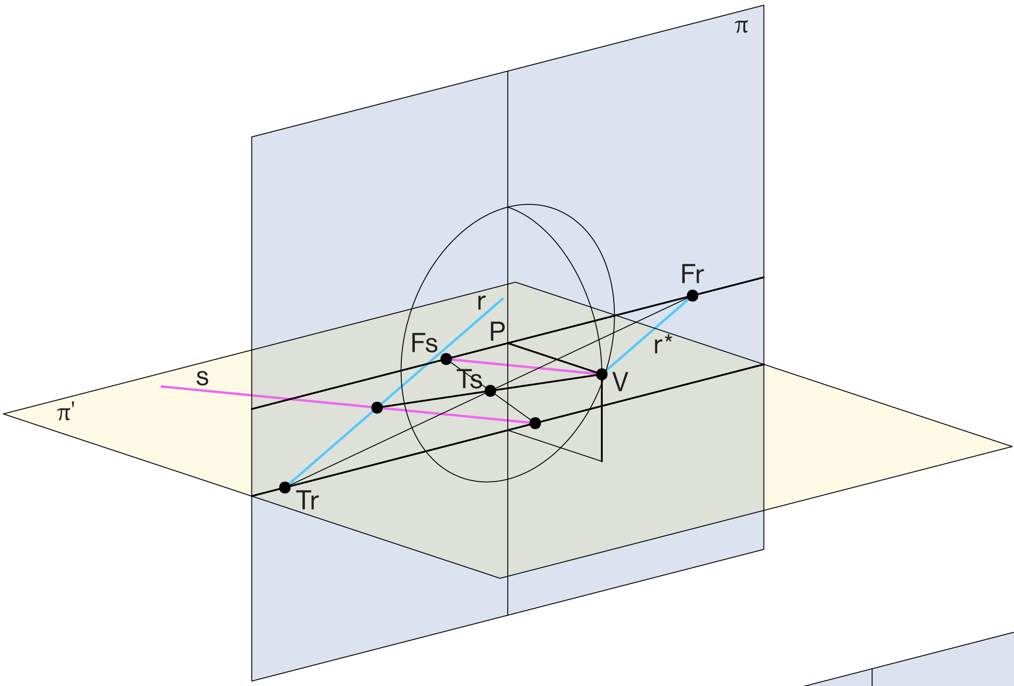
同一平面的灭线和轨迹始终是平行的。

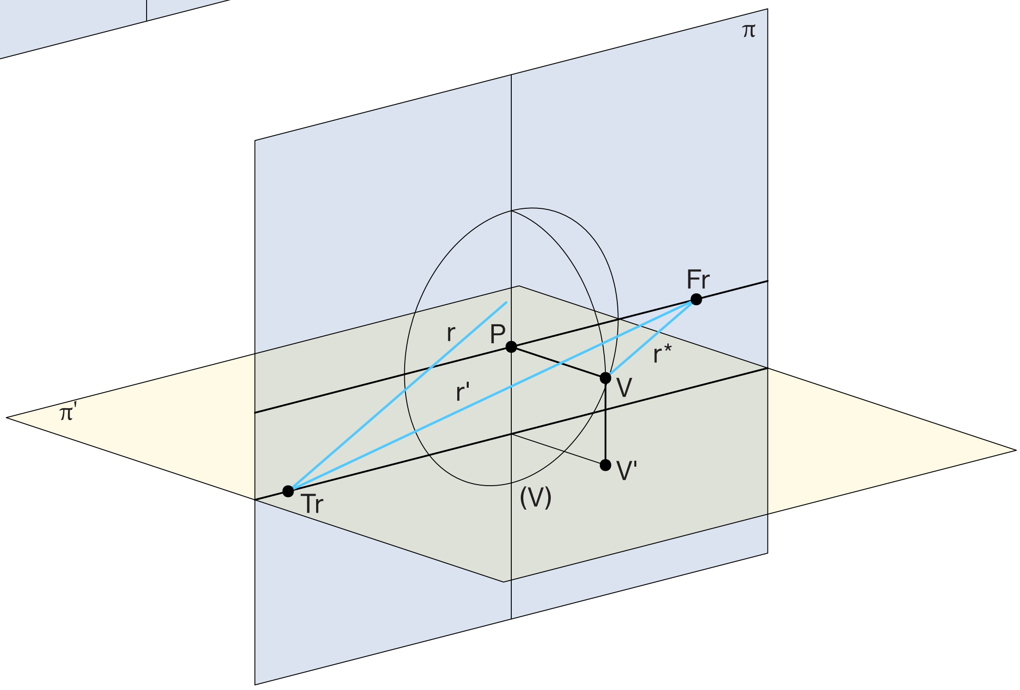
平行平面具有相同的灭点，但轨迹是不同且平行的。

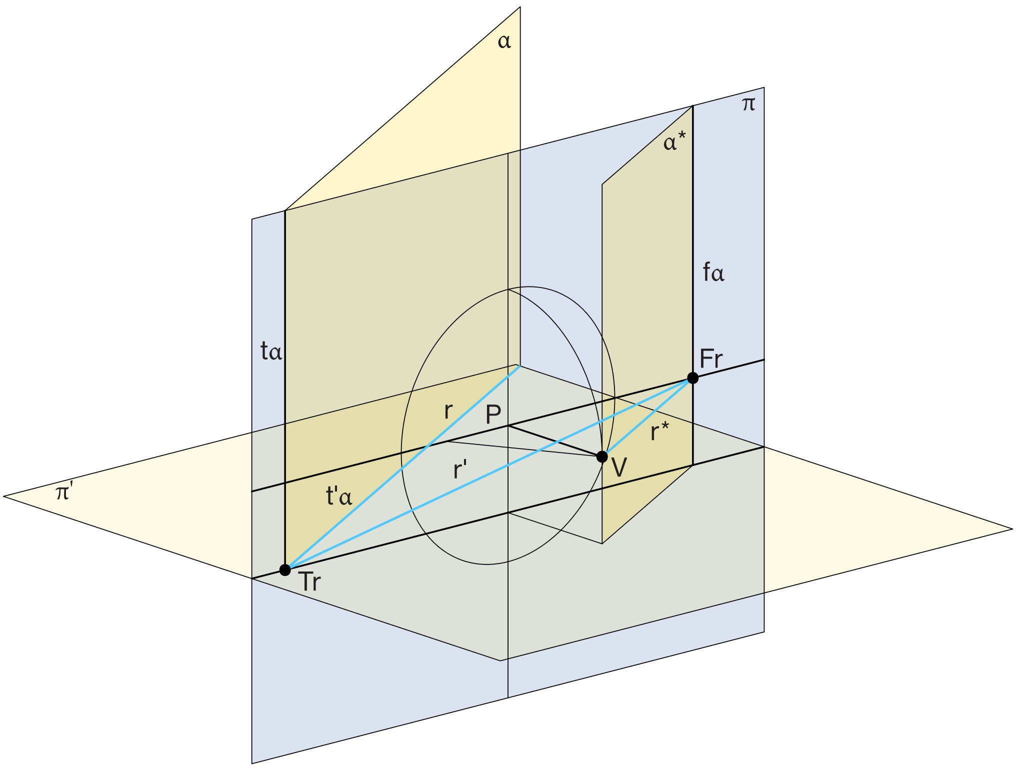
地平线是水平平面的灭线。

垂直于坐标轴框的平面的轨迹和灭线是平面的最大倾斜线。

当垂直或者倾斜的平面与一条直线相交，这条直线的轨迹与平面和地平线相交的轨迹一致，这条直线的灭点与平面的灭点会汇聚在地平线上。


π
Fr
r
Fs
P
r*
s
Ts
V
π'
Tr


π
Fr
r
P
r*
r'
V
π'
V'
Tr
(V)


α
π
α*
fα
tα
Fr
r
P
r*
r'
V
π'
t'α
Tr

4.4 透视构造过程

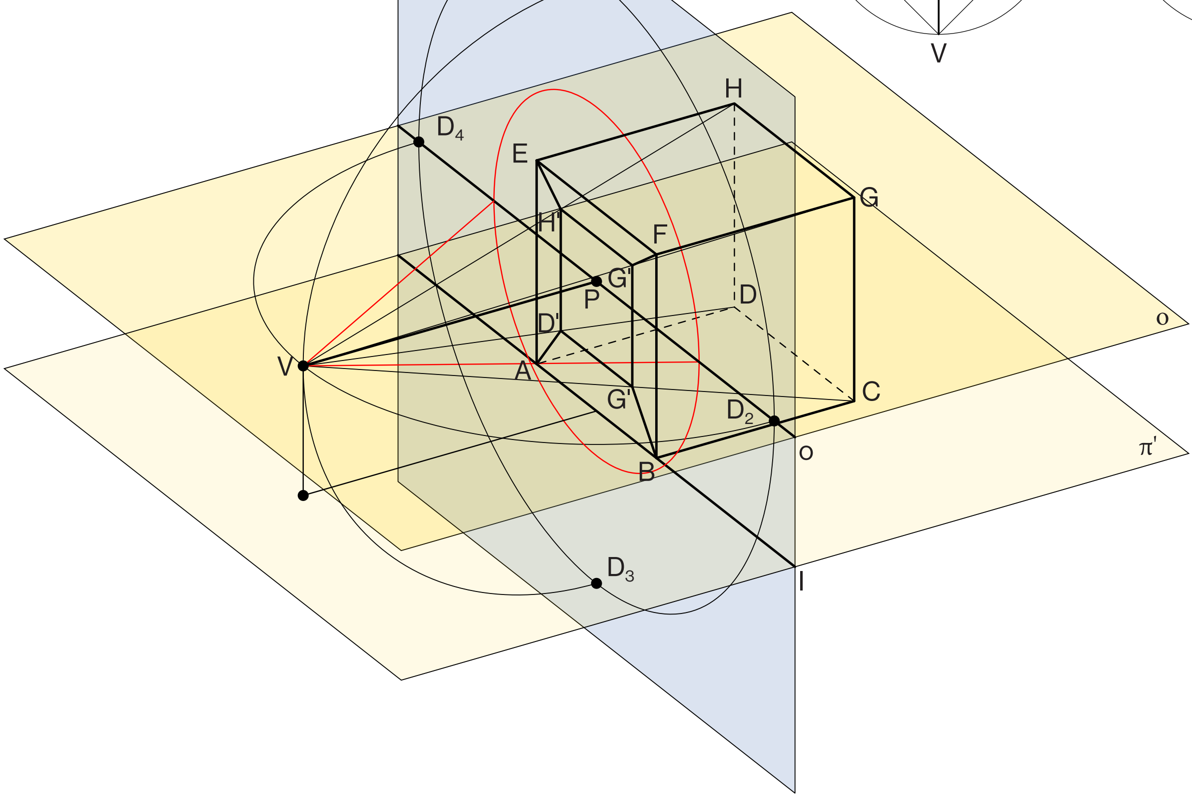
透视可以通过各种程序（连接方法、测量点、几何平面的反转）获得，所有这些都是从阿尔贝蒂和皮耶罗描述的切割方法发展而来的
和皮耶罗描述的切割方法发展而来。
使用的程序采用不同的权宜之计来加快和控制施工速度
使用痕迹和接缝的几何结构，倾向于使用成对的垂直线。
在所有情况下，参考元素的初步表现都是至关重要的（第 49 页）、
这些元素可以直接在图形上绘制，并有助于立即绘制特定的线条和平面。
这些元素可以直接在图画上绘制，有助于立即绘制特定的线条和平面。

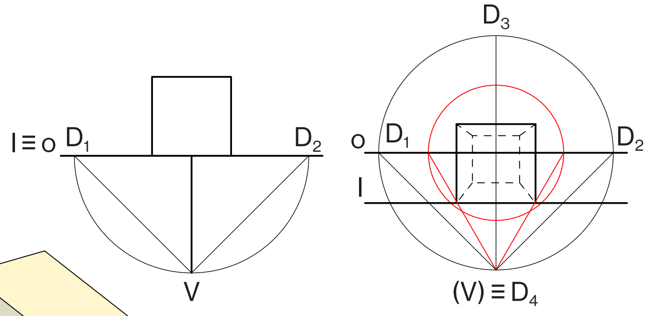
垂直面（框架）透视

垂直平面（或框架）透视法是最常用的透视法。它重建的是观察者在不倾斜视线的情况下直立观察时的视觉效果。
正交表面通常占主导地位，根据所代表空间主要元素的方向，我们会有两种不同的情况
– 中心透视，即两个主要的正交方向分别平行和垂直于画面；
– 意外透视或角落透视，此时两个主要方向是通用的。

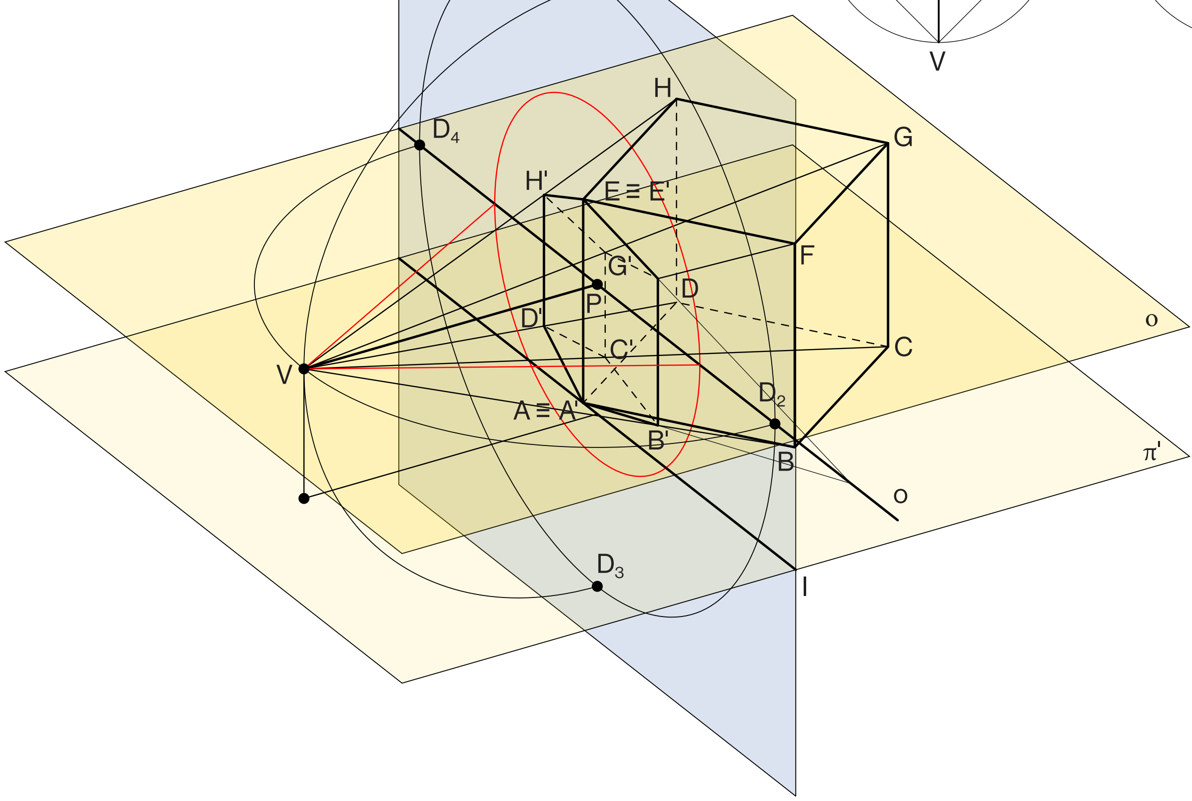
如果画面是垂直的，则所有垂直线都保持平行，在透视中也是垂直的、
因此，当三个笛卡尔方向相互正交时，水平方向上的逸
而垂直线的消失点不正确，因此在透视图中与 I 垂直。
所有垂直于框架的直线（深度线）的消失点都在 P 处，而平行于框架的线
而平行于框架的线则通过不适当的逸出保持平行。
如果我们考虑正交水平线的副本，那么它们的消失点就在地平线上，方法是将它们各自的平行线从 V' 画到 PO，或者直接从 V'画到 PO。
从 V' 到 PO，或直接从距离圆上的（V）画出它们各自的平行线，它们的消失点就在地平线上。
如果我们想象旋转这对正交水平线，那么以直线间夹角为界的两条逸出线就会一起旋转。当两条直线中的一条变成与框架正交时，其逸出点与 P 重合，而另一条直线则与框架平行，逸出点不当。

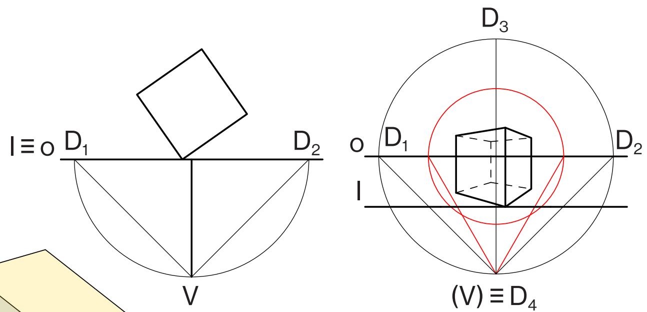
中央视角
Prospettiva centrale



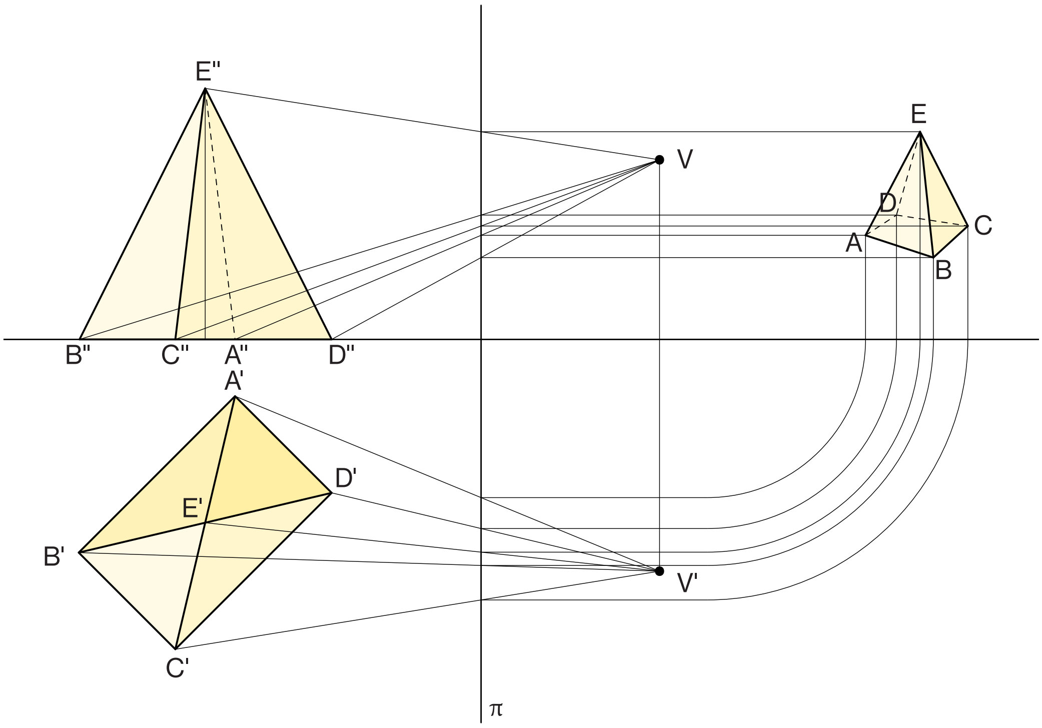


附带视角
Prospettiva accidentale



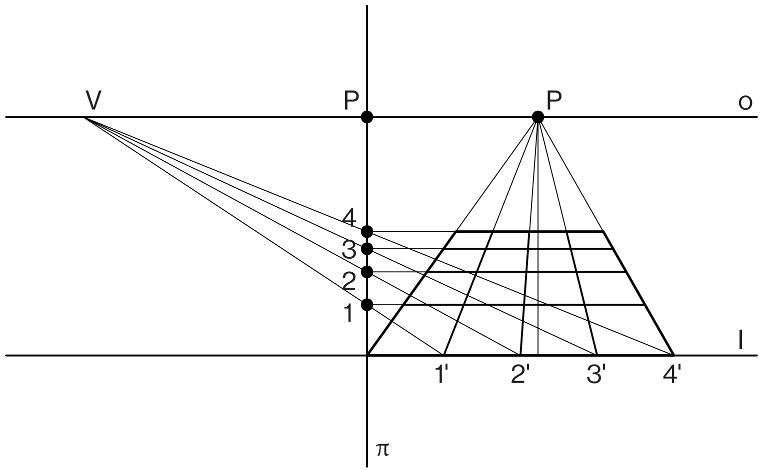


4. 透视



剪切法（皮耶罗–德拉–弗朗西斯卡）

切割法的基础是确定投射透视物体顶点的视觉光线与框架的交点，皮耶罗–德拉–弗朗西斯卡在他的论文中使用了这种方法。透视图像通过测量平面和立面的交点位置与正交投影获得。
与正交投影的交点位置。
文艺复兴时期的透视仪器（透视仪）就是基于这种方法，用来将复杂的形状透视出来，如杜勒的透视门。它有一个带锁挡板的框架和两条可移动的正交线。窗口 "将画面具体化，并与一个固定视点的取景器相连，取景器上还连接着一根线。将待描绘的图形放在透视窗外（透视窗有一个可关闭的挡板），通过拉伸取景器和待描绘物体的明显点之间的导线，可将视觉光线具体化，同时助手移动透视窗框的两根导线，以固定与图像的交点位置。 然后在关闭的窗口上标出交点位置。



缩略法（莱昂–巴蒂斯塔–阿尔贝蒂）

莱昂–巴蒂斯塔–阿尔贝蒂 (Leon Battista Alberti) 在《画论》(De Pictura) 中将这种简略的结构描述为一种简化的方法，可以直接在深度线上测量深度，被认为是对距离点 V 值倾角的一种预测。
阿尔贝蒂的方法是通过倾斜画作表面上的视角来确定与深度平行线的正方形交点的高程，并通过报告正交投影的高程来确定深度，从而设计中央透视的草图、

4. 透视

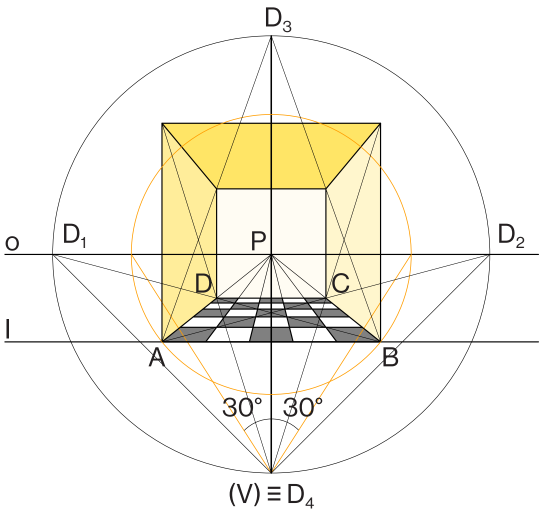
中央透视法

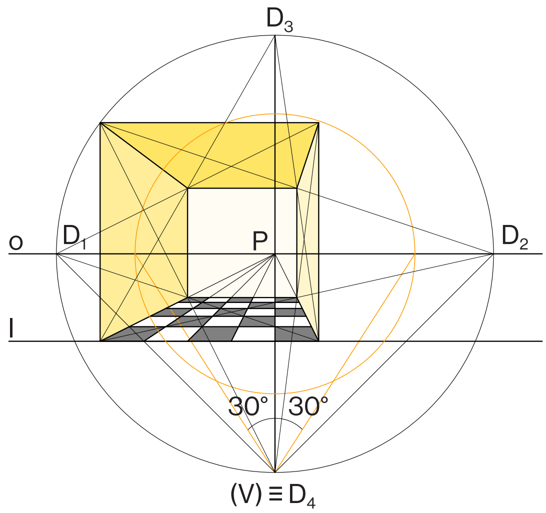
中央透视表示一种情况，即主要的正交方向分别与画面平行或正交，空间或物体位于观察者前方，视线固定在 P 上。
这种视角通常用于表现室内环境，因为它可以同时将空间盒的五个表面视觉化。此外，考虑到透视变量所定义的元素，确定测量直角坐标空间的立方体网格的透视也非常快捷。
事实上，我们将有

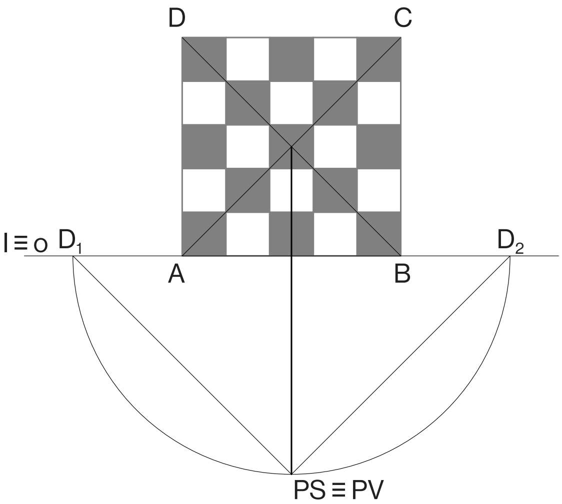
– 与物体的一个面平行（通常是重合）的框架 π；
– 所有与框架（深度线）垂直的线都有一个与主点 P 重合的消失点。
与主点 P；
– 倾斜 45°的线，即立方晶格面上的对角线，其消失点位于地平线（水平线）或主线（属于垂直深度平面的线）上的距离点。

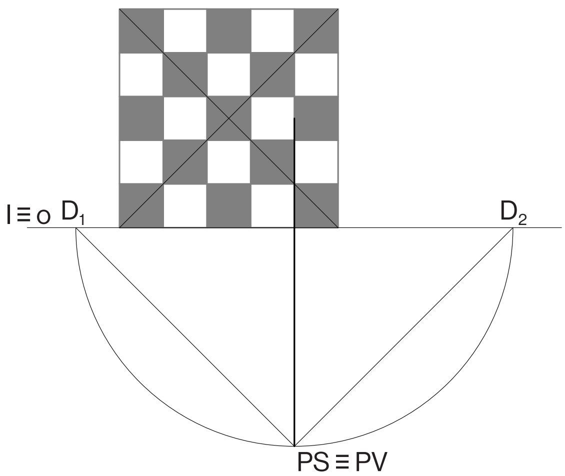
一旦描画出显示 V 与画作距离的距离圆、地平线和入射到主点 P 的垂直线，四个距离点就固定下来了，然后就可以根据立方体在几何图形和画作上的透视结果测量深度了：
– 在绘画上画出面之后，从顶点 P 处将四条深度线连接起来、
– 通过描画正方体的对角线来确定纵深边缘的长度，这些对角线在两个相对的距离点上有
在两个相对的距离点 P 上的连接点、
– 然后，将测量结果绘制在 I 上，就可以绘制出一系列较小的正方形、
绘制深度线，最后找出与对角线交点处的深度测量值。

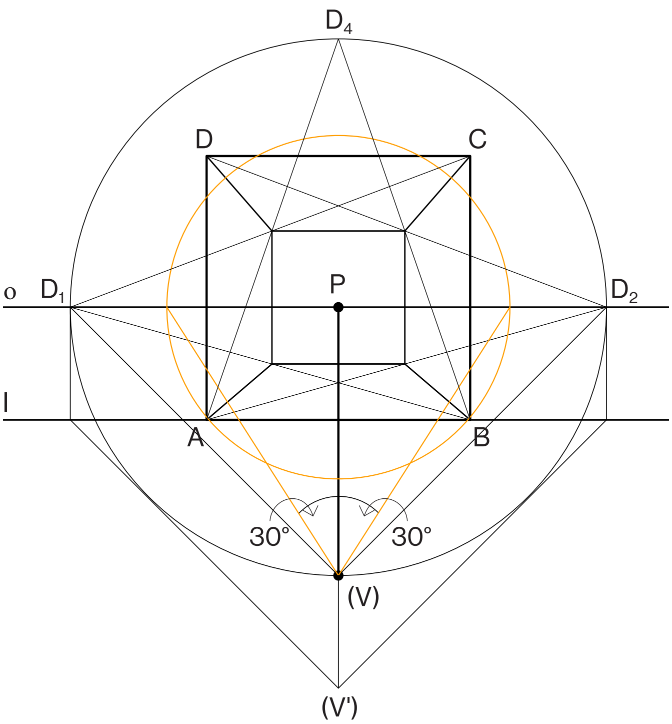
这种结构沿用了 15 世纪画家使用的方法，他们通过绘制跳棋来测量空间。
跳棋来测量空间。由其发展延伸出测量点的方法、
这种方法加快了意外透视的构建速度。

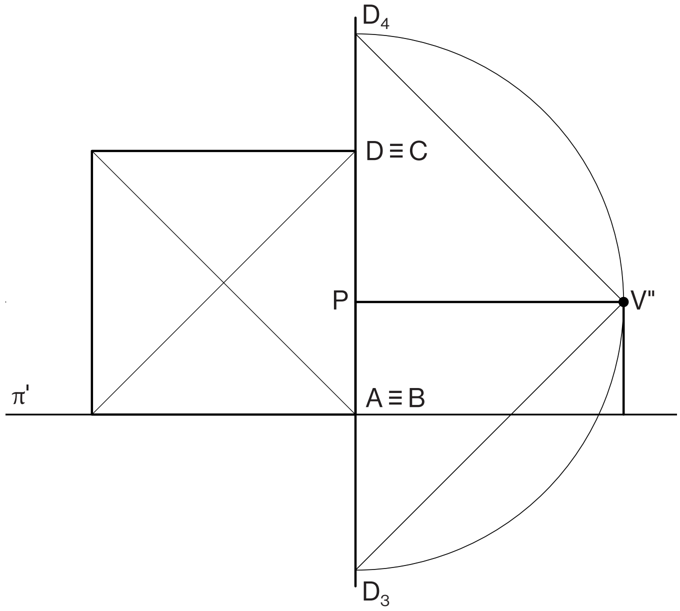

D3
o
D1
D2
P
D
C
I
A
B
30°
30°
(V) ≡ D4


D3
o
D1
D2
P
I
30°
30°
(V) ≡ D4


D
C
I ≡ o
D1
D2
A
B
PS ≡ PV


I ≡ o
D1
D2
PS ≡ PV


D4
D
C
o
D1
P
D2
I
A
B
30°
30°
(V)
(V')


D4
D ≡ C
P
V''
π'
A ≡ B
D3

4. 透视

赋格或痕迹法

该程序通过确定消失点（V 所引导的平行线与框架的交点）和轨迹点（与框架的交点）来表示线段，这些点在投影中总是已知的。
当有成对的正交直线与框架成一定角度，并且空间是从角落位置开始表示时，就会用到这种方法。它常用于表现外部空间，以显示建筑的形状。与中央透视法相比，它的视角没有那么静态。

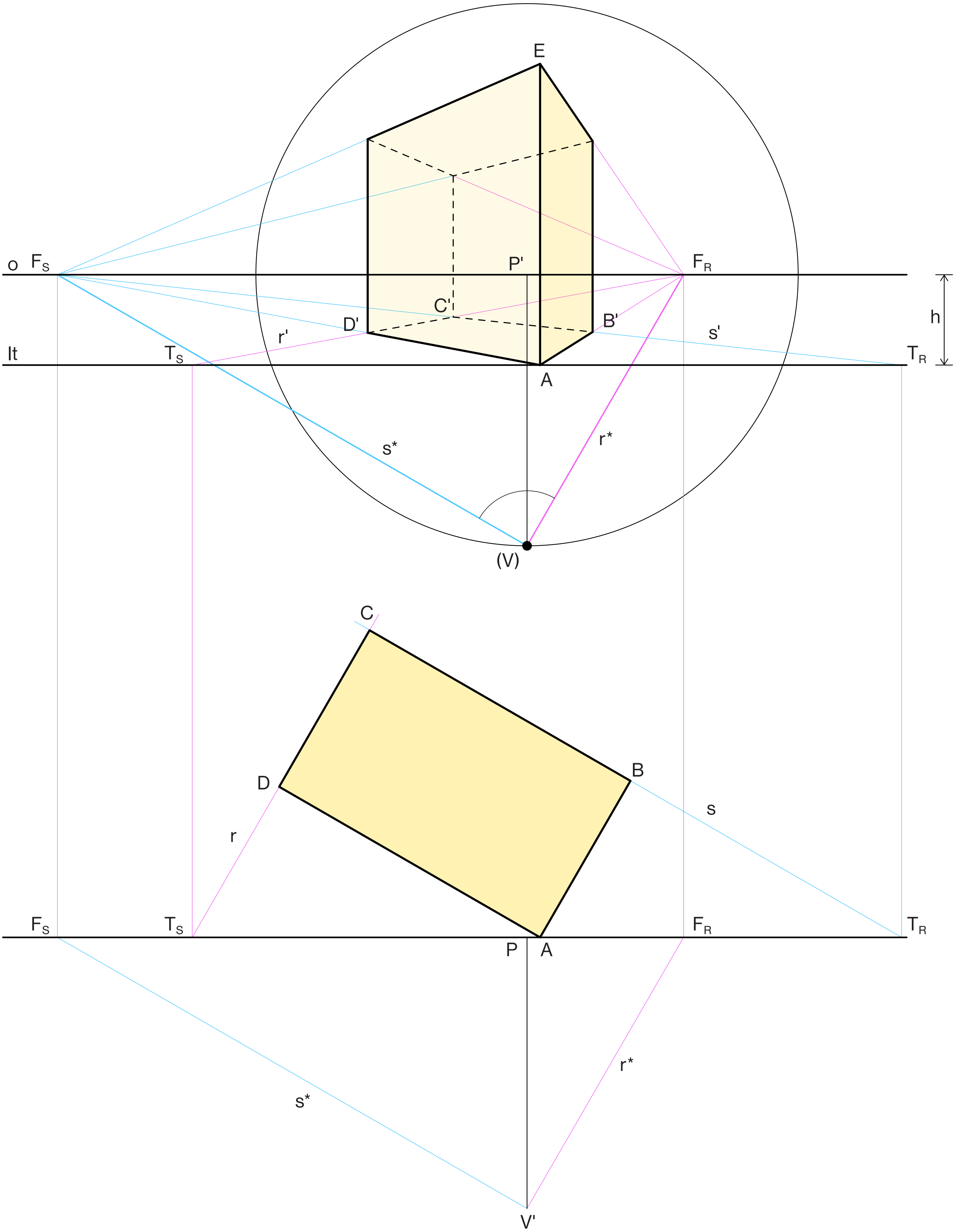
追踪主要参考元素是绘画的基本辅助工具，即使
即使不直接在画作上工作，描摹主要参考元素也是绘画的基本辅助工具，因为它可以立即验证
因为它可以立即验证从预备图中测量的转移。因此，首先要描画
– 主要点 P、
– 地平线 o、
– 基本垂直线
– 以 P 为圆心、VP 为半径、距离为 d 的圆、
– V），V 相对于地平线的反向、
– 视圆 r，与 d 相内（较小）、
– 与地平线 o 相距 h 的地面线。

物体的面是相对于框架的通用排列（应始终检查
物体位于视圆 r 范围内）。
一对相互垂直的直线会有两个消失点（右侧和左侧），如果它们是水平的，那么消失点就在地平线上。

垂直边缘通常与画框重合，以便直接测量其上的高度。然后，前景是中央垂直线（必须不与基本线重合才能拍出好照片），而两对垂直线汇聚在两个不同的消失点，分别位于地平线上或 P 的左右两侧。
所有位于地平线以上的水平线都向下汇聚，而位于地平线以下的水平线则向上汇聚。
位于地平线以下的水平线则向上汇聚。

这对正交直线上的两条逸出线被icidence agon束缚并一起旋转。因此，在地平线上固定一条水平线的逸度，我们就可以推导出垂直线在地平线上的逸度
如第 54–55 页所示。

找到连接点后，将相应直线的轨迹放在地面线上，就可以重建平面透视图了。
然后测量画上的高度。


E
o
F_S
P'
F_R
h
C'
D'
B'
r'
s'
lt
T_S
T_R
A
s*
r*
(V)
C
B
D
s
r
F_S
T_S
F_R
T_R
P
A
r*
s*
V'

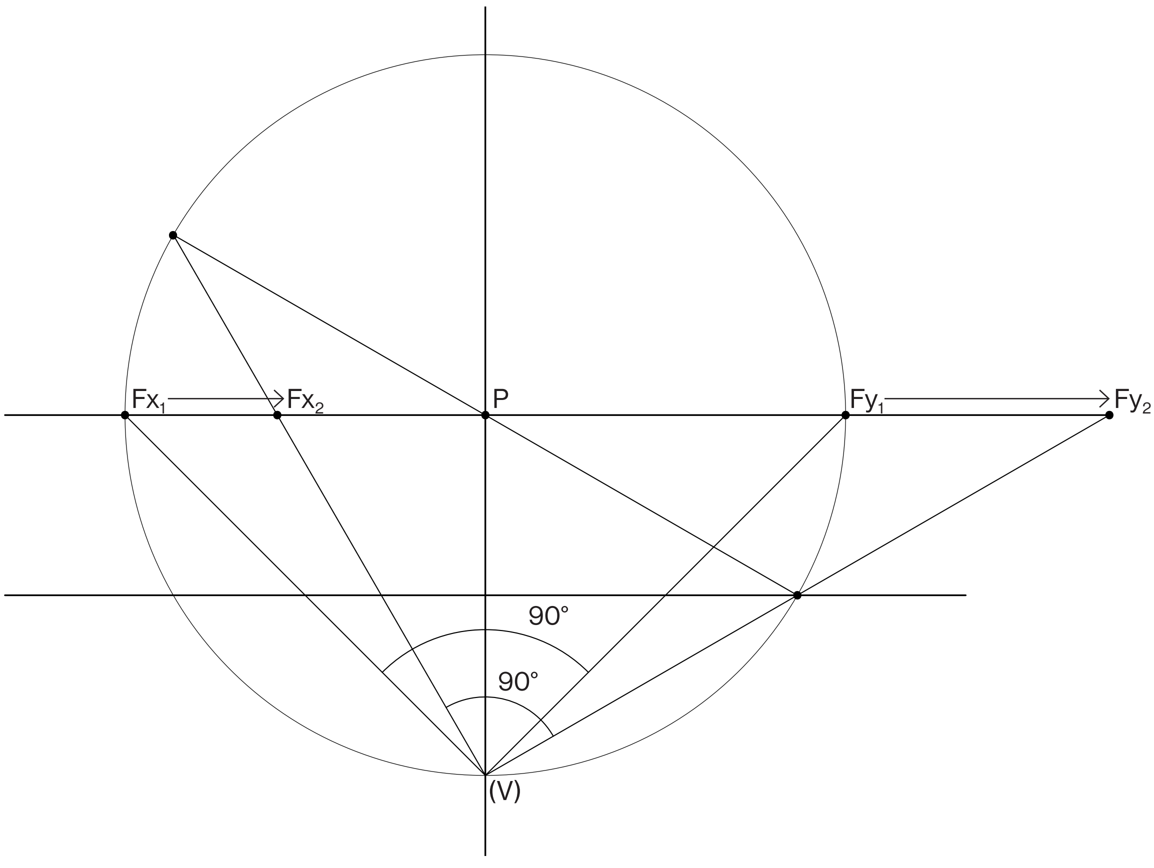
共轭物的复制（垂直线的飞行）

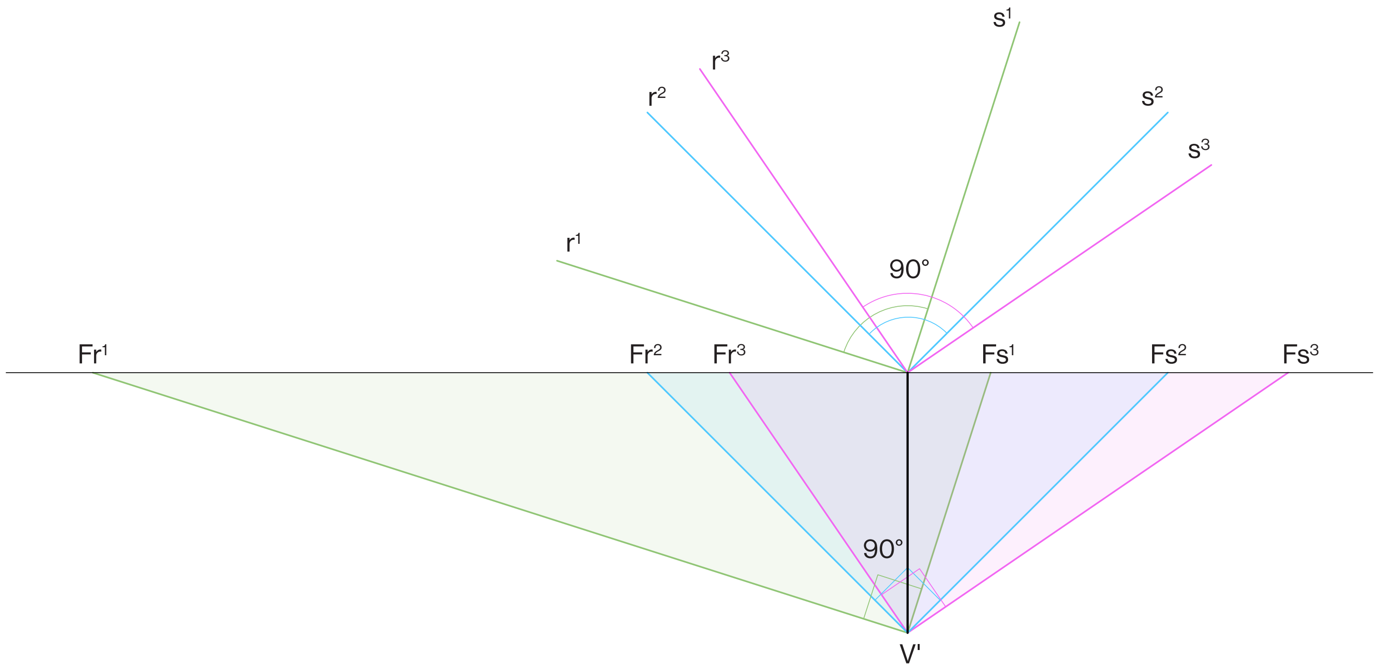
成对垂直直线的关节点相互绑定，它们相对于距离圆被称为绑定，因此一旦一个关节点被固定，另一个关节点就可以通过几何构造来确定。

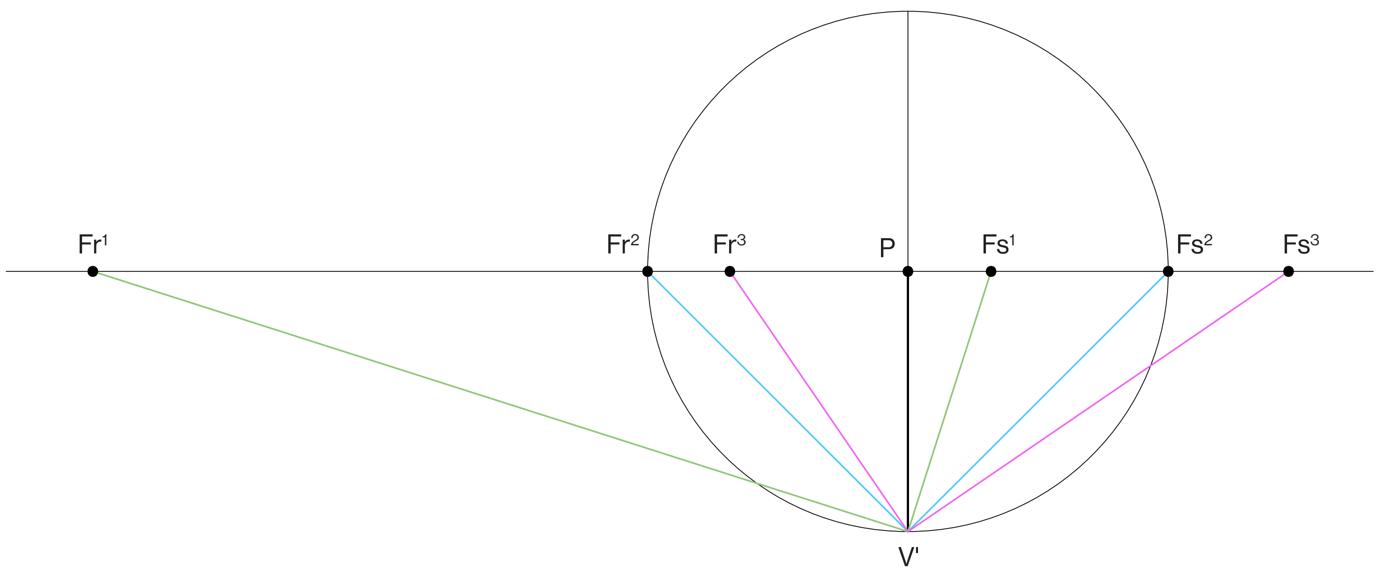
如果我们设想旋转一份受约束的正交直线，它们的叶片会一起移动，当一条直线变得垂直于框架时，它的叶片会移动到 P 处，而另一条直线则变得平行于框架，因此叶片是不适当的。

因此，在确定了水平线在地平线上的虚化之后，就可以立即推导出垂直线的虚化 (垂直线始终在地平线上，位于 P 的反面）。
记住 (V) 中顶点处的角度是中心处角度的两倍；
知道了距离圆，我们就可以沿着与直径相对应的中心角追溯到与距离圆延长线的交点
与线段 VFr 的延长线的交点，然后将对端与 (V) 相接
的垂线到圆；
在与地平线的交点上，找到与第一条垂线垂直的直线。

这种结构可以直接在画作上正确定位正交线条的连接点，而无需在画作上进行
在画作上正确定位正交线条的连接点，而无需事先绘制。

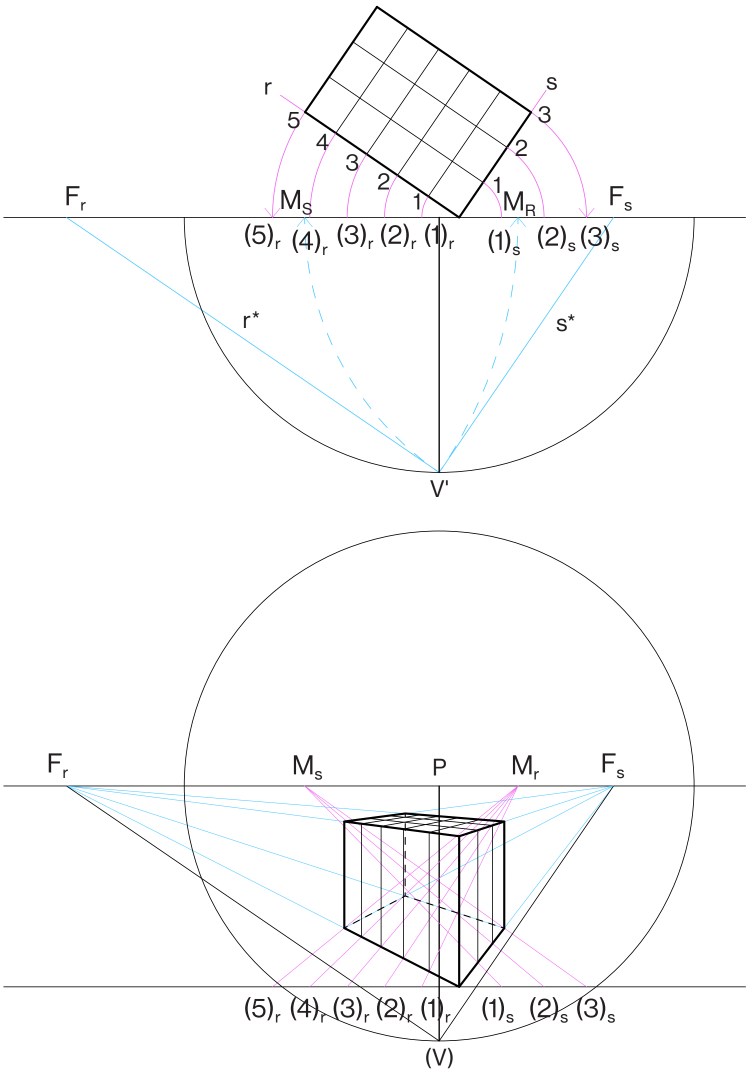


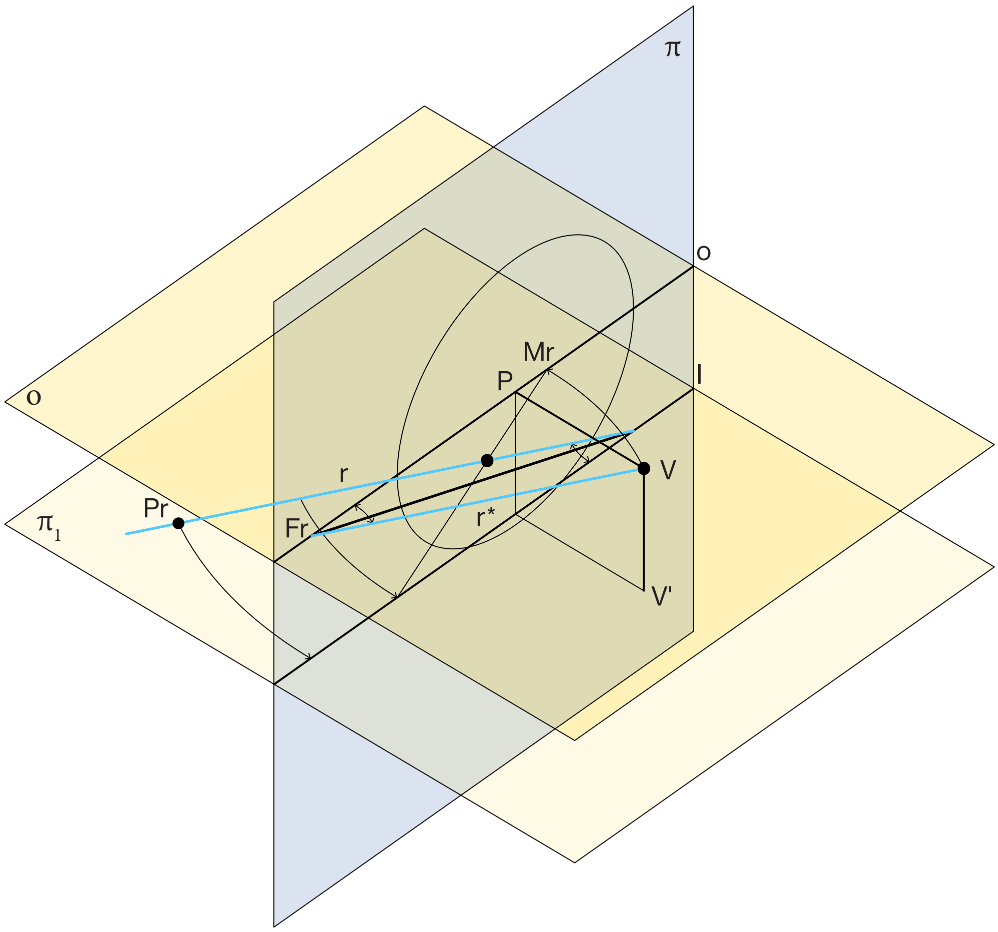

s^1
r^3
r^2
s^2
s^3
r^1
90°
Fr^1
Fr^2
Fr^3
Fs^1
Fs^2
Fs^3
90°
V'

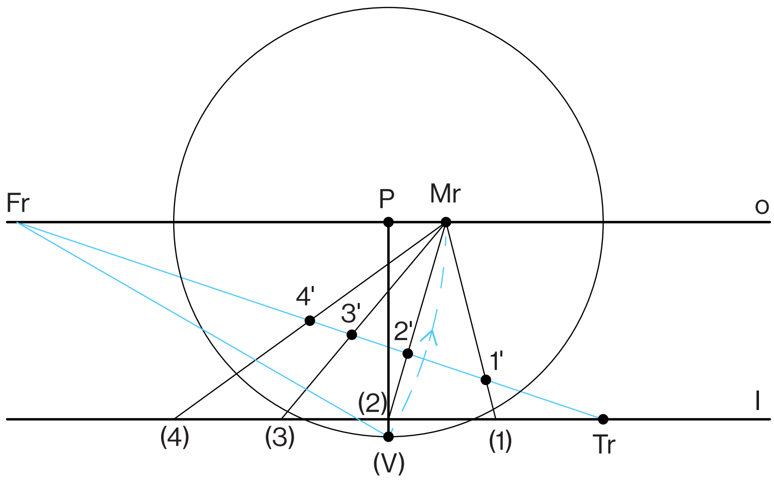

Fr^1
Fr^2
Fr^3
P
Fs^1
Fs^2
Fs^3
V'

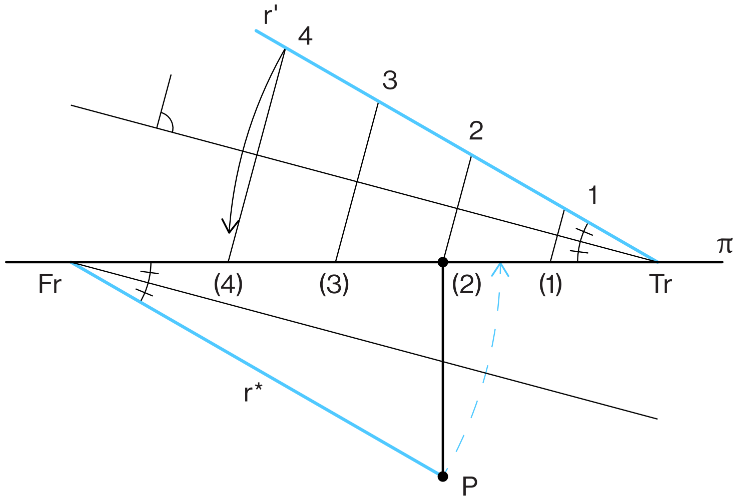
测点法（线的反转）

这种测量点的方法可以加快测量对齐点 (属于同一条直线) 之间的透视距离，方法是将直线倾斜到框架上，并在透视图中将它们与倾斜方向对齐。给定一条直线 r 及其透视图 r'(TrFr)，我可以将 r' 从 Tr 倾斜到 (r)。由于倾覆相当于从垂直于平分线平面的不适当中心投影，因此方向 Fd 的飞行会将 r 的点投影到 (r) 的相应点，反之亦然。因此，与 r' 在 p 上的任何倾斜上测量的点对齐，就可以测量出 r' 上的相对距离，即 r 线的透视距离。由于知道直线的消失点位于 V 的平行线与框架 p 的交点，因此要找到 Fd，只需将 V 从 Fr 倾斜到框架上，并沿同一方向旋转即可。如果该直线属于几何平面 p'，因此是水平的，那么 Tr 将位于地面线 lt 上。这样就可以将 p 上的 r'从 Fr 倒转到 lt，并将 V 从 Fr 倒转到地平线 o 上的 Mr。 对于已知轨迹和运行轨迹的任何直线，我都可以用同样的方法进行计算。V 的反面 Mr 是直线的测量点，因为将它与 (r) 上的测量值连接起来，我们就可以找到直线透视图上的相应测量值。事实上，Mr 是直线 r 与框架 p 之间夹角 a 的平分线的垂线消失点，因此它是 r 的翻转投影到地面线 l 的中心，将 Mr 与 (r) 上的测量点对齐，就能找到它们在 r' 上的透视图。直线 r 相对于其轨迹的翻转可以发生在任何平面上，条件是 Fr 对 Mr 中的 V 的翻转同时发生在与直线 r 旋转的平面平行的平面上。




π
o
o
Mr
P
I
V
r
Pr
π_1
Fr
r*
V'


Fr
P
Mr
o
4'
3'
2'
1'
(2)
I
(4)
(3)
(V)
(1)
Tr


r'
4
3
2
1
π
Fr
(4)
(3)
(2)
(1)
Tr
r*
P

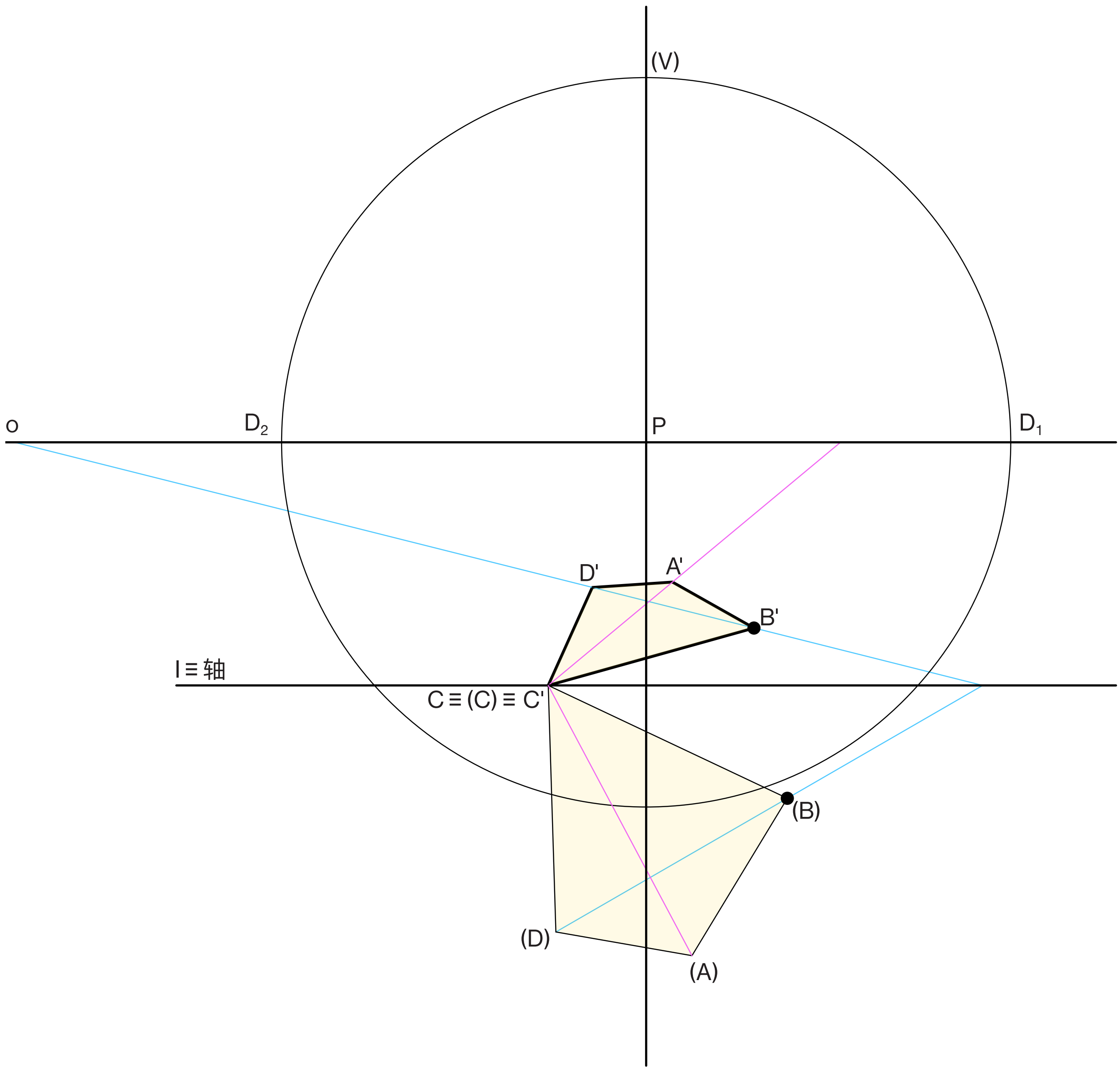
4. 透视

几何平面的翻转

将几何平面 π' 翻转到平面 π 上，这个操作可以简化在平面上绘制透视图的过程。这样就不需要先制作一个缩小比例的预备图，而是直接在目标平面上开始绘制。

通过翻转，几何平面π'将绕其轨迹旋转90°。轨迹是指地平线。同时，V点被翻转为(V)，这个点位于与P相关的基准线上，距离(V')与V到π'的距离相等，即地平线的高度。

通过考虑几何平面π'的同构，即中心(V)和轴I之间的对应关系，可以快速确定透视图。同构表示几何平面π'中的对应点与轴I上的相应点相交，同时，相应的点与中心(V)对齐。



在处理复杂平面图时，通过对几何平面进行翻转，可以更加方便地进行绘图，这种操作有助于加快整个绘图过程。
通过将几何平面π'翻转到平面π上，形成了一种同构关系：几何平面π'上的元素与它们在平面π上的透视投影之间存在一种一一对应的关系。
假定一个属于几何平面p1的图形T，由于T从两个不同的中心（分别是R和V）投影而得到的透视图（T）和T'在同构关系下，其中R是与由几何平面和平面π组成的二面角垂直的虚正交面，而V是另一个投影的中心。
因此，存在一个以中心(V)和轴沿着地平线l的同构关系。