DISEGNO a DESIGN

2

FONDAMENTI DI GEOMETRIA DESCRITTIVA

a cura di

MICHELA ROSSI
SARA CONTE
GIORGIO BURATTI

SCUOLA DEL DESIGN

POLITECNICO MILANO 1863

Redattori degli elaborati grafici e dei modelli tridimensionali

LUCA ARMELLINO
PAOLO ANTONIO COLLIA
FRANCESCA SENA

Traduzione cinese (glossari e testi)

QIAN ZHANG
YINGFEI ZHU

Voce narrante

VALENTINA MARCHETTI (italiano) ,
QIAN ZHANG (cinese)

Il supporto didattico di azzeramento dell'area del disegno è realizzato grazie al finanziamento erogato della Scuola del Design del Politecnico di Milano nell'ambito del "Progetto pilota di sperimentazione didattica post COVID".

Tutti i disegni presenti all'interno del supporto didattico sono stati realizzati dai redattori o dai curatori.

SCUOLA DEL DESIGN

Le basi del disegno come linguaggio del progetto

Compendio per gli studenti dei Design degli Interni

Questo materiale didattico è una sintesi delle conoscenze preliminari necessarie per accedere al Laboratorio del Disegno, che richiede l'azzeramento delle differenze rispetto alle competenze già acquisite nei diversi percorsi scolastici.
Una raccolta di cose da sapere per imparare a disegnare nel modo che serve ai progettisti, che devono avere coscienza delle forme nello spazio per adattarlo alle esigenze dell'uomo, rendendolo abitabile con manufatti artificiali.
Non è un libro di testo né un manuale, ma un compendio di principi teorici da comprendere, contenente applicazioni pratiche e informazioni tecniche indispensabili per l'apprendimento del disegno di progetto, che è lo strumento di espressione del Design.
La raccolta è concepita come un elaborato ibrido di immagini, testi scritti e registrazioni dei ragionamenti grafici e geometrico-proiettivi, ed è impaginato in forma di libro illustrato stampabile, per una 'lettura lenta' o per avere un supporto cartaceo sul quale seguire il ragionamento grafico con i propri appunti e disegni.
Il testo è corredato da modelli 3D orbitabili nello spazio per una loro migliore visualizzazione, accompagnati da registrazioni che permettono di seguire il ragionamento geometrico concentrandosi sulle immagini.
Il testo scritto è corredato da un glossario dei principali termini tecnici dell'Architettura e della Geometria Descrittiva, perché la proprietà di linguaggio è alla base dell'affinamento di ogni competenza tecnica, con traduzione comparata in cinese e nelle principali lingue europee.
La struttura del volume divide l'indice in due parti: la prima riguarda l'articolazione generale del disegno tecnico e raccoglie una serie di nozioni di base del linguaggio grafico del progetto, da conoscere e applicare anche nel disegno a mano libera, per una

rappresentazione corretta e intelligibile della realtà tridimensionale.
La prima parte è formata dai seguenti capitoli:

- le costruzioni grafiche della geometria, che servono per controllare la precisione del disegno e del tracciamento preliminare ;
- le norme basilari del disegno tecnico e in particolare i codici grafici del disegno di architettura;
- il disegno alle diverse scale di rappresentazione degli elementi costruttivi, con alcuni riferimenti alla loro realizzazione e alla terminologia.

La seconda parte del compendio riguarda i fondamenti della Geometria Descrittiva, che sono alla base della rappresentazione rigorosa delle forme e dello spazio nelle applicazioni del disegno tecnico:

- i principi teorici della geometria proiettiva;
- le proiezioni ortogonali;
- le proiezioni assonometriche;
- la prospettiva lineare.

Le registrazioni e la traduzione cinese che accompagnano le costruzioni geometriche di base, applicano conoscenze elementari di facile comprensione e servono per aiutare la comprensione del linguaggio e l'apprendimento delle diverse costruzioni con l'esercizio sotto dettatura, prima della necessaria verifica in autonomia.
In modo analogo la spiegazione dei tre metodi proiettivi si conclude con la soluzione grafica di alcuni problemi, come traccia da seguire in un esercizio finalizzato all'applicazione dei principi presentati e alla verifica della loro comprensione.

Indice

1. Fondamenti Proiettivi

1.1 Introduzione

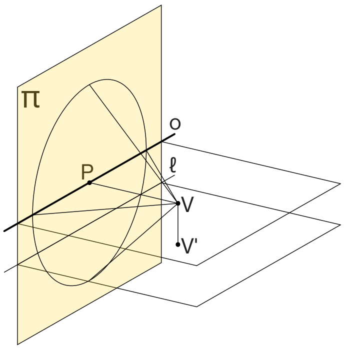
Definizioni

La Geometria Descrittiva è una trasposizione grafica della Geometria Proiettiva ed è la disciplina che trasforma il Disegno in una scienza esatta, rendendo possibile la rappresentazione rigorosa e misurata degli oggetti nello spazio attraverso una descrizione esatta (matematica), basata su metodi codificati a partire dalle condizioni proiettive dei punti dello spazio su un piano. La Geometria Descrittiva quindi studia le trasformazioni dei corpi soggetti alla proiezione da un centro su un piano, detto quadro, la cui rappresentazione bidimensionale degli infiniti punti dello spazio tridimensionale mantiene una corrispondenza biunivoca tra i punti dello spazio reale e le loro proiezioni sul piano.

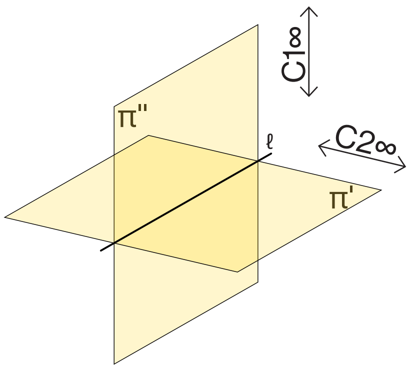
L'intuizione proiettiva nasce dall'osservazione di fenomeni naturali come la luce e le ombre, e permette di rappresentare gli elementi dello spazio tridimensionale sul piano attraverso una doppia operazione di proiezione da un centro di proiezione (**C**) e di sezione con il quadro (**π**).

L'immagine proiettiva quindi è il risultato di una doppia operazione di *proiezione* e *sezione*:
• *Proiezione*: raggi e piani proiettanti comuni al centro **C** e agli oggetti nello spazio. L'ente proiettante deve contenere il centro e l'elemento proiettato, quindi la retta (elemento comune a due punti) proietta i punti, il piano (elemento comune a un punto e a un piano) proietta la retta.
• *Sezione*: intersezione degli enti proiettanti con il quadro **π**. Intersecando il quadro, che è un piano, tutti gli enti proiettanti riacquistano la dimensione originale degli elementi proiettati (l'intersezione tra retta e piano è un punto, l'intersezionetra due piani una retta), quindi l'immagine proiettiva riacquista le stesse qualità grafiche della figura reale nello spazio.
• Tra la figura reale e la sua proiezione piana esiste una corrispondenza biunivoca che, conoscendo la posizione relativa del centro di proiezione **C** rispetto al quadro **π**, consente sempre di risalire dall'immagine (=proiezione) ai punti reali nello spazio.

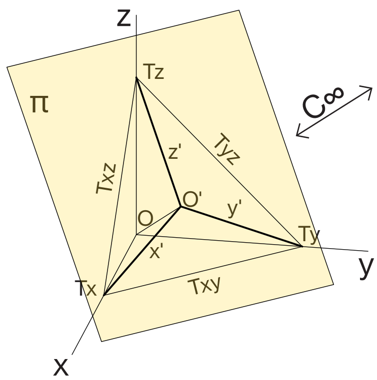
A seconda delle relazioni tra il centro di proiezione e il quadro, (posizione reciproca dei due elementi fondamentali), la geometria descrittiva prevede tre metodi basati sul medesimo processo proiettivo:
• Le *proiezioni ortogonali, doppia proiezione simultanea da due centri impropri ortogonali a due quadri ortogonali tra loro.*
• Le *proiezioni assonometriche* (prospettiva parallela), proiezione da un centro improprio su un piano obliquo rispetto ai riferimenti di una terna di assi ortogonali.
• Le *proiezioni centrali*, proiezione da un centro proprio (prospettiva lineare se il centro e il quadro sono riferiti ad un piano orizzontale).



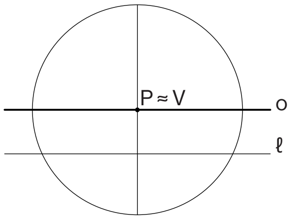
Prospettiva centrale

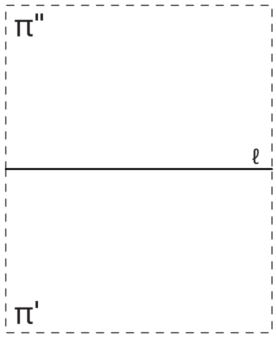


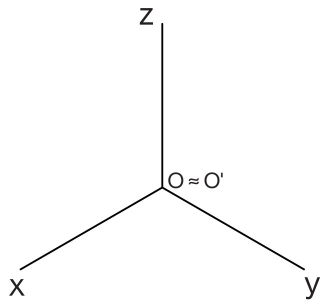
Prioezione ortogonale



Prioezione parallela







Terminologia

• I *punti* sono individuati da lettere maiuscole dell'alfabeto latino:
Origine degli assi, **O**
Centro di proiezione, **C** (se sono più di uno, uso un numero **C1**, **C2**...)
Punto generico, **P**

• Le *rette* sono individuate da lettere minuscole dell'alfabeto latino:
Asse, **a**
Retta di riferimento, **l**
Retta generica, **r**

• I *piani* sono individuati dalle lettere maiuscole dell'alfabeto greco: **α**, **β**, **γ**...
Il *piano di proiezione* si chiama quadro, e viene indicato con **π** (se sono più di uno, uso i numeri **π1**, **π2**...)

• La *proiezione* di un elemento è individuata dal nome dell'elemento seguito da un apice **'**

• Gli *elementi ribaltati* sono contrassegnati dalle parentesi **()**

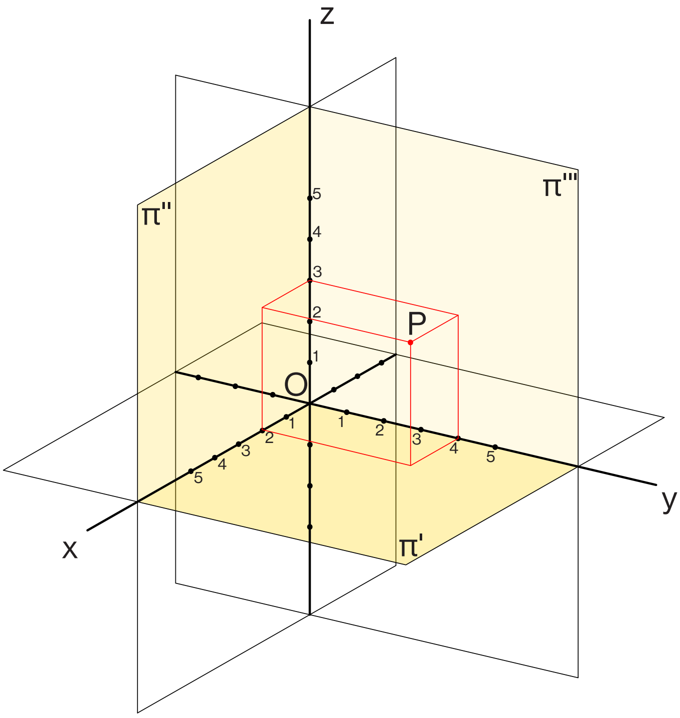
• Chiamiamo *tracce* le intersezioni degli elementi reali con il quadro:
La *traccia* della retta è un punto, quindi sarà **Tr** (T maiuscola)
La *traccia* del piano è una retta, quindi sarà **tα** (t minuscola)

• Chiamiamo *fuga* la proiezione del punto improprio della retta, quindi rette parallele hanno fuga coincidente:
La *fuga* della retta è un punto, quindi sarà **Fr** (F maiuscola)
La *fuga* del piano è una retta, quindi sarà **fα** (f minuscola)

1.2 Punti propri e impropri

Presupposti

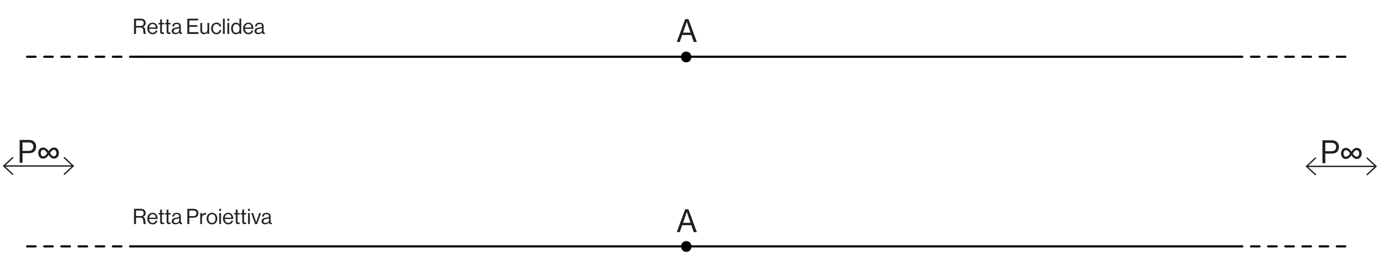
La Geometria analitica definisce la posizione degli enti dello spazio viene definita in riferimento alla distanza degli elementi caratteristici da una terna di assi ortogonali tra loro, uscenti da un'origine comune, come quelli introdotti dalla geometria analitica di Cartesio (1566-1650).



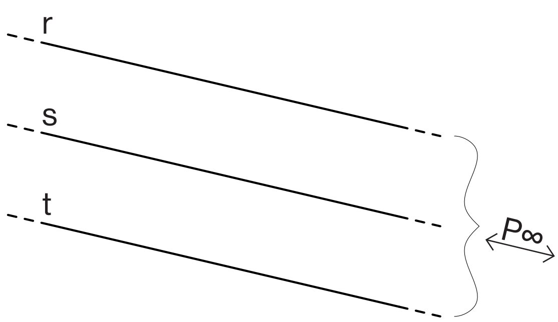
La possibilità di rappresentare tutti i punti dello spazio, anche quelli a distanza infinita, si basa però su una novità introdotta pochi anni dopo dai matematici barocchi che hanno studiato le coniche, curve generate dalle proiezioni della circonferenza, introducendo il concetto di *punto improprio* della retta e per estensione quello di *retta impropria* del piano (Desargue, 1591- 1661).
Circa un secolo dopo Gaspard Monge (1746-1818) codificò la Geometria Descrittiva a partire dalle proiezioni ortogonali che furono determinanti per lo sviluppo del pensiero tecnico-scientifico ottocentesco, dimostrando che era possibile individuare con esattezza scientifica le posizioni relative dei punti dello spazio (o dei vertici delle facce di un'oggetto) attraverso una doppia proiezione ortogonale su piani ortogonali tra loro. Dalle proiezioni è sempre possibile risalire al punto nello spazio, perchè la relazione proiettiva crea una corrispondenza biunivoca tra un corpo e la proiezione.

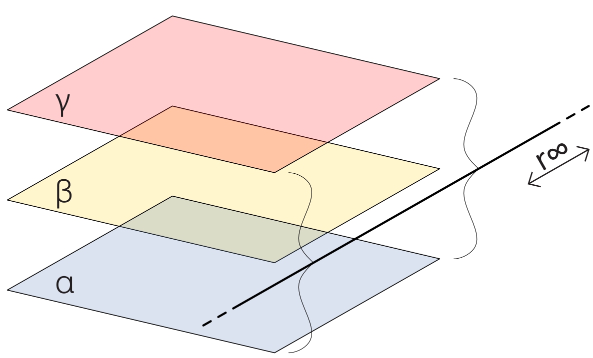
Enti impropri

La geometria elementare di Euclide concepisce elementi illimitati di lunghezza infinita, come la retta e il piano senza porsi il problema della loro rappresentazione, considerandoli una successione infinita e aperta rispettivamente di punti o rette, per cui un punto spezza la retta in due semirette e una retta spezza il piano in due semipiani.



Per la geometria proiettiva ogni retta ha infiniti punti propri e un solo punto improprio, comune a tutte le rette parallele ad essa, mentre ogni piano ha infinite rette proprie e una sola impropria, comune a tutti i piani paralleli a quello (postulato). I punti impropri sono detti *fughe* (o fuochi) e le rette improprie, sulle quali si trovano le fughe delle rette del piano stesso, di *retta limite*.





1.3 Proiezioni

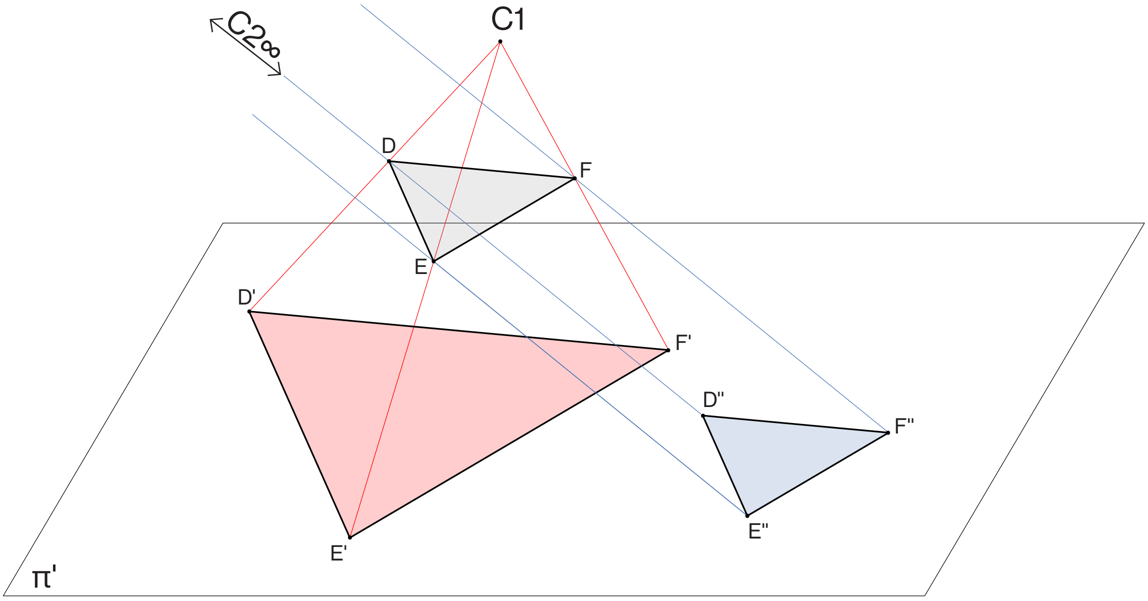
Coniche e cilindriche

A seconda che il centro di proiezione **C** sia un punto proprio o improprio abbiamo due situazioni differenti:

• Se **C** è un punto proprio, gli enti proiettanti sono *rette incidenti* in C (stella di rette/piani per C, punto proprio) che proiettano i punti/rette nello spazio e quindi abbiamo una proiezione conica o centrale

• Se **C** è un punto improprio, ovvero una direzione, gli enti proiettanti sono *rette o piani parallele* (fascio di rette/piani parallele alla direzione di C) che proiettano i punti e le rette nello spazio e quindi abbiamo una proiezione cilindrica o parallela.

(Leonardo diceva che le proiezioni si fanno per coni o per cilindri)



• Nelle *proiezioni coniche* gli elementi impropri si trasformano in propri e non si conserva il parallelismo.

• Nelle *proiezioni cilindriche* gli elementi impropri restano impropri e quindi si conserva il parallelismo.

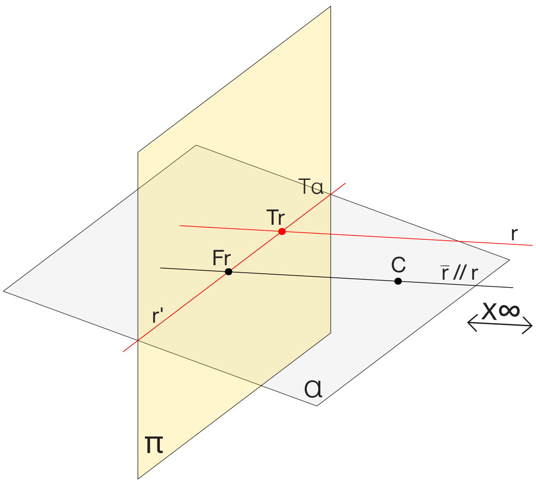
Come la geometria euclidea studia le invarianti metriche (lunghezze, distanze, angoli) delle figure, che si mantengono inalterate in seguito a movimenti rigidi nello spazio (traslazione, rotazione), la geometria proiettiva studia le invarianti grafiche (incidenza, allineamento, birapporto*), che si mantengono inalterate dopo una o più proiezioni nello spazio, permettendone la riconoscibilità nonostante il mancato mantenimento delle qualità metriche.

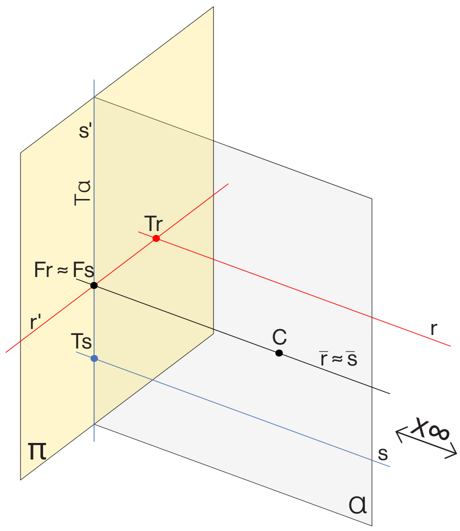
* Birapporto = rapporto armonico di 4 punti allineati: b (A, B, C, D)= b (A', B', C', D').

Proiettività

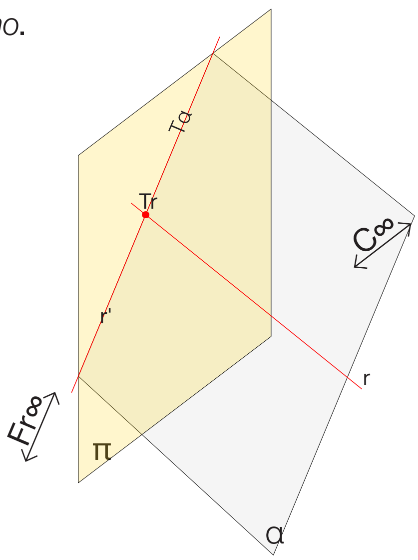
In particolare, nella proiezione da centro proprio le rette parallele hanno una fuga comune (stesso punto improprio), come nella prospettiva, che è un caso particolare di proiezione centrale, nella quale la giacitura del quadro viene individuata rispetto ad un piano di riferimento orizzontale.
Poichè per individuare una retta è sufficiente conoscere due suoi punti, la sua proiezione è definita dalle proiezioni di due punti appartenenti alla retta:

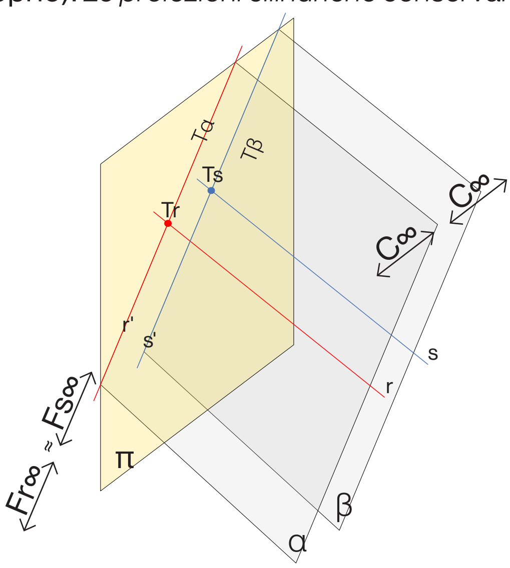
• Il suo punto improprio (intersezione della retta proiettante parallela alla retta stessa, ovvero la parallela passante per C) ovvero la fuga. Nella proiezione da centro proprio, due rette parallele hanno un punto proprio in comune (fuga della retta = proiezione del punto improprio = punto proprio): *Le proiezioni coniche non conservano il parallelismo*.





• Un qualsiasi punto proprio, ad esempio l'intersezione della retta stessa con il quadro (traccia) che per le condizioni di appartenenza deve giacere sia sulla retta che sulla sua proiezione. Nella proiezione da centro improprio, due rette parallele hanno in comune il punto improprio e le loro immagini sono parallele (proiezione del punto improprio=punto improprio): *Le proiezioni cilindriche conservano il parallelismo*.



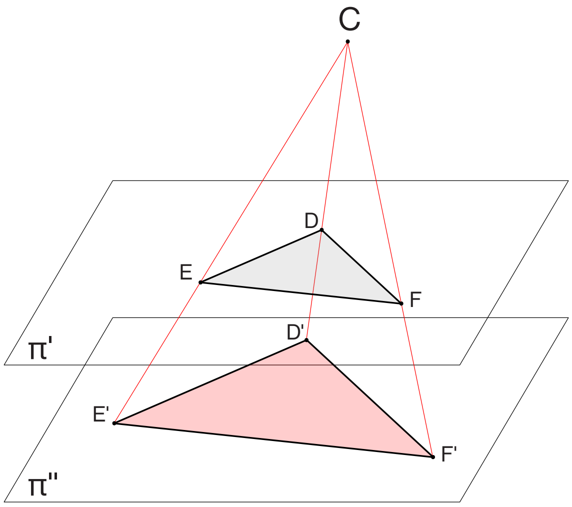


1. Fondamenti Proiettivi

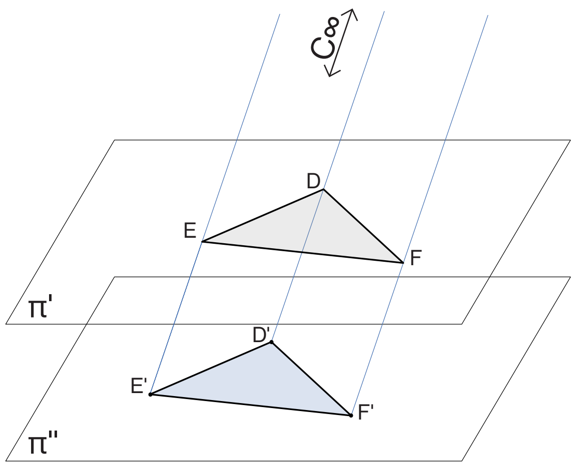
Prospettività

Due piani **π'** e **π"** si dicono prospettivi e si intersecano in una retta unita (i cui punti appartenengono ad entrambi i piani, e ogni punto corrisponde alla sua proiezione) sulla quale si incontrano le rette corrispondenti dei due piani; questa retta si chiama *asse*, che può essere proprio o improprio.
La retta impropria di ciascuno dei due piani si proietta sull'altro come retta limite, sulla quale si trovano le fughe delle rette del piano. A seconda di come sono messi i piani **π'** e **π"** rispetto a **C** si individuano diverse prospettività:

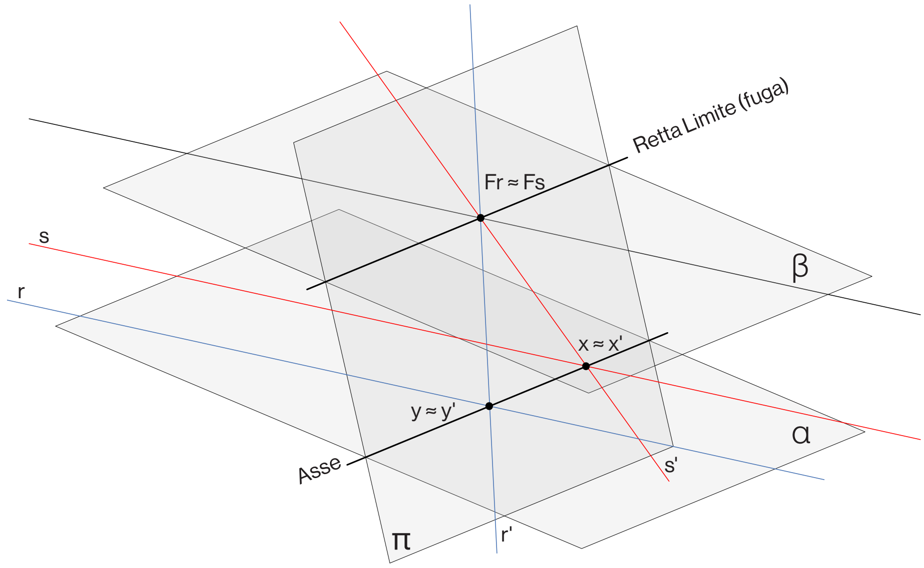
• *Omotetia* (centro proprio e asse improprio - retta limite impropria) si mantiene il parallelismo, gli angoli ma non le dimensioni e la proiezione è una similitudine;



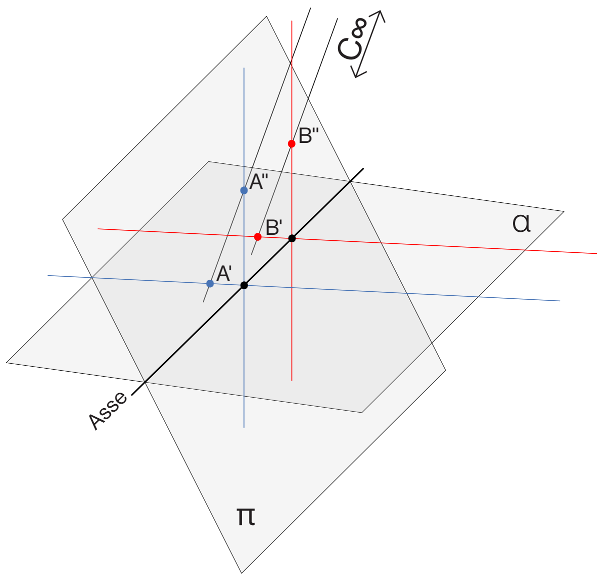
• *Uguaglianza* (centro improprio e asse improprio - retta limite impropria), si mantiene il parallelismo, gli angolo e le dimensioni, la proiezione corrisponde ad una traslazione;



• *Affinità obliqua* (centro proprio, asse proprio - retta limite propria) si mantengono solo le invarianti proiettive;



• *Affinità ortogonale* (centro improprio, asse proprio - retta limite impropria) si mantiene il parallelismo, ma non angoli e dimensioni. Nel caso particolare in cui il centro improprio è perpendicolare al piano bisettore ho un ribaltamento: tutti i punti del piano ruotano intorno all'asse descrivendo archi di circonferenza e si mantengono inalterate le proprietà metriche.



1.4 Glossario internazionale

Italiano	English	Chinese
Altezza	Height	高度
Angolo	Angle	角度
Asse ottico	Central axis of vision / sightline / line of sight	视线中心轴
Assonometria	Axonometric view /paraline drawing	等轴测图
Assonometria isometrica	Isometric axonometry / isometric projection	等轴测投影
Assonometria ortogonale	Orthographic axonometry	正交轴测图
Assonometria obliqua	Oblique axonometry / oblique projection	斜轴测图
Assonometria cavaliera	Elevation oblique	正视斜投影
Assonometria militare	Plan oblique	倾斜平面图
Campo visivo	Field of view / Visual field	视野
Cono ottico (visivo)	Cone of vision	视锥
Distanza principale	Distance from the station point to the picture plane	主距（视角和图像平面之间的距离）
Fuga /retta impropria (di piani paralleli)	Vanishing line	消失线
Punto di fuga /p. improprio rette parallele	Vanishing point	消失点
Intersezione (retta/punto di)	line/point of intersection	相交线/点
(Linea di) Orizzonte	Horizon line	地平线
Linea di terra	Ground line	地线（物体与地面接触的水平线）
Ortocentro	Orthocenter	正交中心
Osservatore	Observer / viewer	观察者
Piano di terra / p. geometrale	Ground plane	地平面
Proiezione	Projection	投影
Proiezioni ortogonali	Orthographic projections	正交投影
Prospettiva	Perspective	透视
Prospettiva razionale (a piano inclinato)	Three-point perspective	透视投影（斜投影）
Prospettiva Accidentale (a due fughe)	Two-point perspective	透视投影（两点透视）
Prospettiva centrale (a una fuga)	One-point perspective	透视投影（一点透视）
Prospettiva lineare	Linear perspective	线性透视
Punto di distanza	Diagonal point	对角点
Punto principale	Center of vision	视觉中心

Punto misuratore/di misura	Measuring point	测量点
Punto di vista	Station point / viewer’s eye	视点
Quadro (prospettico)	Picture plane	透视投影中的画面平面
Raggio visivo	Visual ray	视线
Restituzione prospettica	Perspective drawing / perspective view	透视图
Retta	(Straight) line	直线
Vista dall’alto	Top view	俯视图
Vista dal basso	worm’s eye view / bottom-up view	仰视图
Vista da dietro	Rear/back view	后视图
Vista laterale	Side view	侧视图
Vista a volo d’uccello	Bird-eye view / aerial view	鸟瞰图

2. Le Proiezioni Ortogonali

2.1 Definizione

2.2 Rappresentazione di enti geometrici

- Il punto
- La retta
- La traccia
- Posizioni particolari della retta
- Rappresentazione del piano
- Piani in posizioni particolari: piani proiettanti

2.3 Condizioni Geometriche

- Appartenenza
- Parallelismo
- Condizioni di perpendicolarità

2.4 Vera Misura

2.1 Definizioni

Il metodo delle proiezioni ortogonali considera lo spazio diviso in quattro diedri da una coppia di piani ortogonali tra loro:

• il piano orizzontale **π'**;

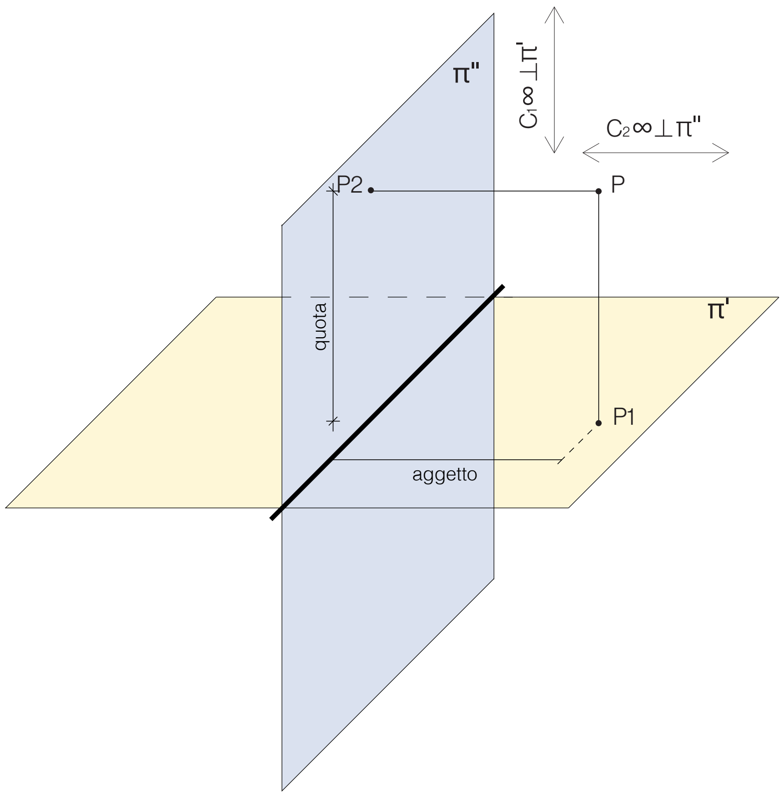
• il piano verticale **π''**.

π' e **π''** , detti anche primo e secondo quadro, sono i pieni di proiezione da **C1** e **C2** centri di proiezione ortogonali ai due quadri. La retta di intersezione è il riferimento del sistema, rispetto alla quale si misurano l'aggetto e la quota. **π'** e **π''** piano di proiezione; la loro retta di intersezione è chiamata linea di terra l (o lt). Sono i piani di proiezione e vengono detti anche, rispettivamente, primo e secondo.
E' possibile rappresentare qualunque oggetto dello spazio con due proiezioni ortogonali (proiezione ortogonale bicentrica):

• la prima proiezione sul piano orizzontale; **π'** da **C1∞**

• la seconda proiezione sul piano verticale. **π''** da **C2∞** che viene ribaltato su **π'**

I raggi proiettanti sono sempre perpendicolari ai rispettivi piani di proiezione.



....

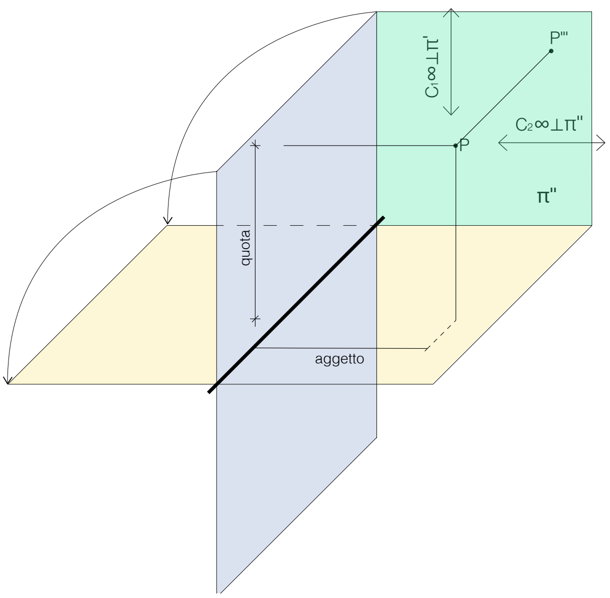
....

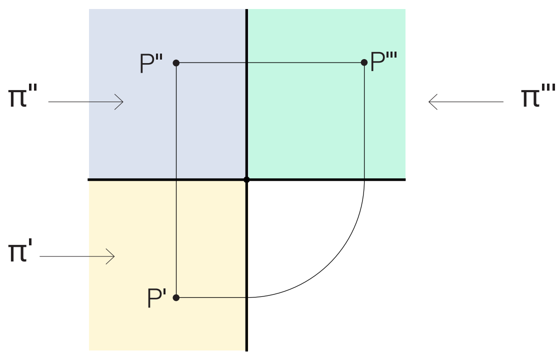
....

....

....

Gli enti geometrici e le figure piane appartenenti a piani ortogonali alla proiezione non subiscono deformazioni e quindi sono direttamente misuraili (in scala) sulla loro rappresentazione.
Operando successivamente un ribaltamento del piano orizzontale su quello verticale si ottengono le due proiezioni su uno stesso piano, che si fa coincidere con il piano del disegno.
Talvolta queste due proiezioni non sono sufficienti a rappresentare completamente l'oggetto ed allora si ricorre ad altre proiezioni ortogonali fatte su piani opportunamente scelti e quindi ribaltati sul piano verticale (proiezioni ortogonali policentriche), come il terzo piano di proiezione **π'** è scelto di norma perpendicolare ai due piani di proiezione precedenti (perpendicolare quindi alla linea di terra).
La linea di intersezione di **π'** con **π''** è detta linea di terra secondaria e in seguito del ribaltamento dei piani **π'** e **π'''** su **π''**, assume sul piano del disegno una doppia rappresentazione.
Nella figura con riferimento alle proiezioni ortogonali di un punto **P** appartenente al primo diedro, sono illustrate le procedure grafiche normalmente usate per realizzare la corrispondenza dei punti appartenenti alla duplice rappresentazione della linea di terra secondaria.



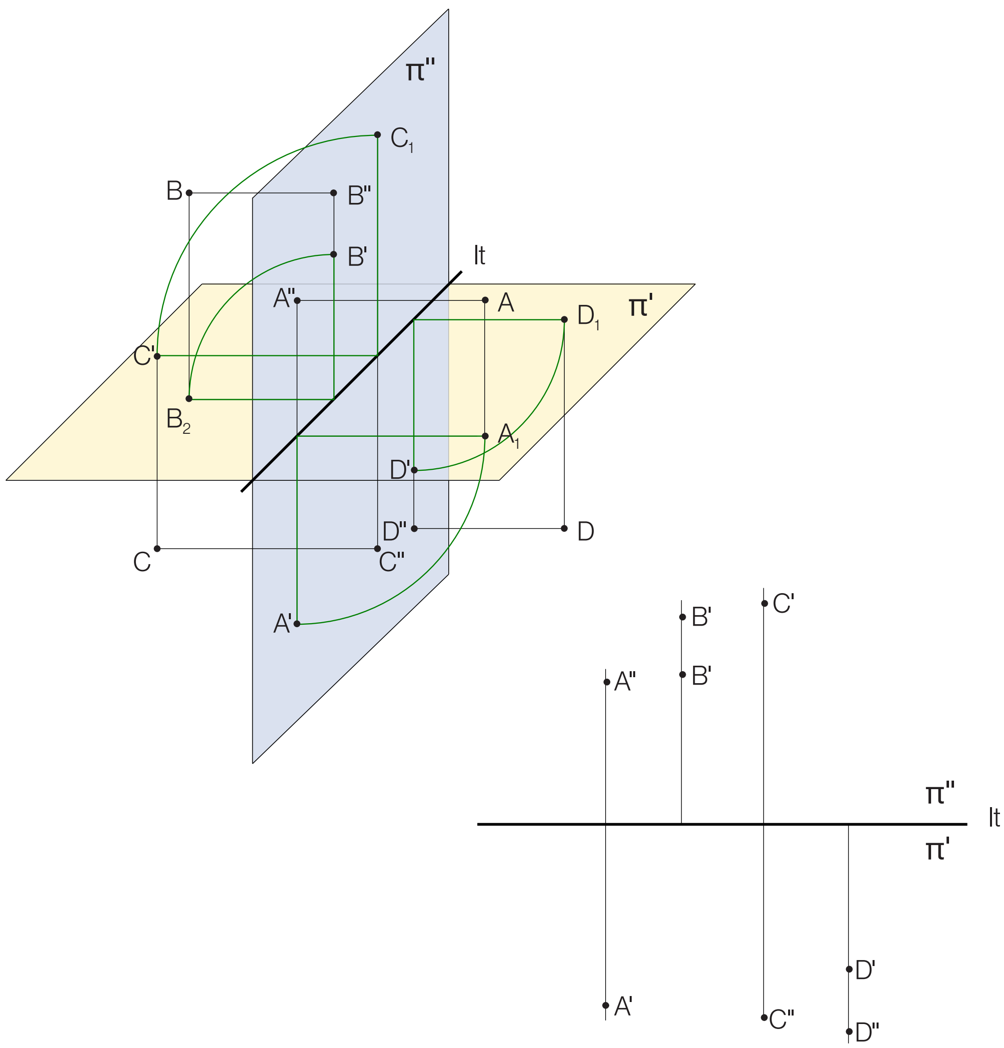


Nel seguito, per brevità, con il termine “proiezione” si intende una proiezione ortogonale.
Di regola l'oggetto da proiettare viene posto nel primo diedro, cosicché la prima e seconda proiezione stanno, rispettivamente, sotto e sopra la linea di terra.
Come già indicato, si indicheranno:
i punti con lettera maiuscola (**A**, **B**, **P**, **Q** ...); le rette con lettera minuscola (**a**, **b**, **p**, **q** ...); i piani con lettera alfabeto **π**.
Gli spigoli visibili si rappresentano con segno continuo sottile, quelli coperti con segno tratteggiato dello stesso spessore. Quelli sezionati ri rappresentano con segno continuo spesso, le linee di riferimento con segno molto sottile.

2.2 Rappresentazione di enti geometrici

Il punto

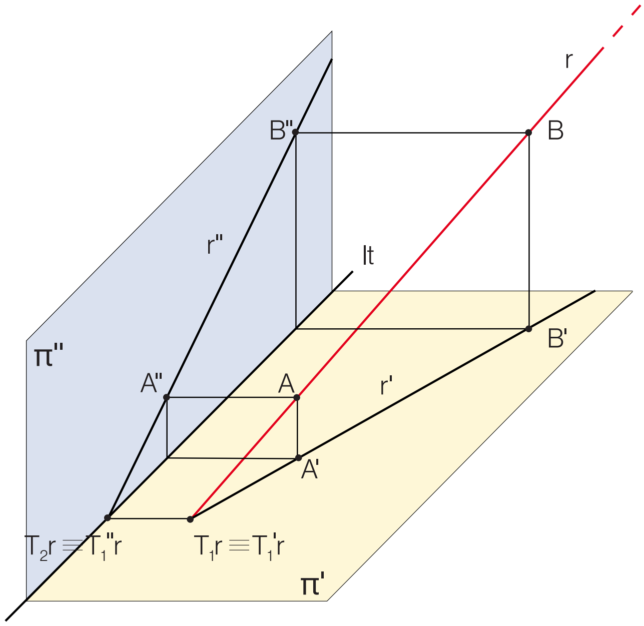
Si consideri un punto nello spazio e le sue proiezioni sui piani **π'** e **π''**.
Eseguito il ribaltamento di **π'** su **π''**, come in precedenza precisato, si ottengono diverse rappresentazioni del punto a seconda del diedro di appartenenza del punto stesso.
La figura rappresenta le proiezioni ortogonali di quattro punti appartenenti ai quattro diversi diedri in cui è diviso lo spazio.

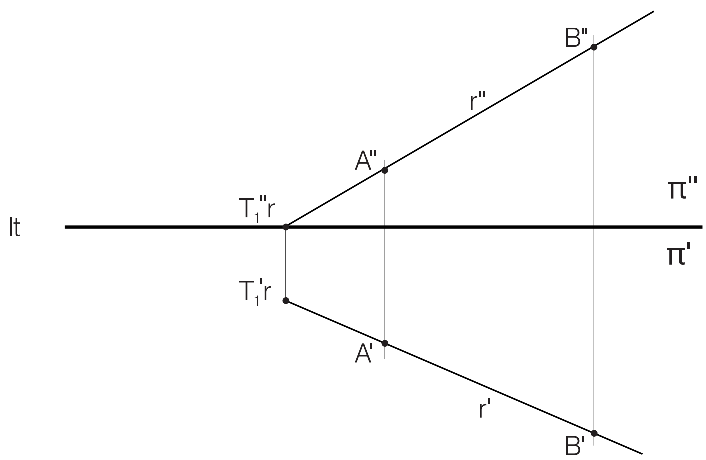


Rappresentazione dei punti: **A** appartenente al primo diedro; **B** appartiene al secondo diedro; **C** appartenente al terzo diedro; **D** appartenente al quarto diedro.

La retta

Per rappresentare una retta è sufficiente conoscere due punti qualsiasi **A**, **B** appartenenti alla retta oppure i punti nei quali interseca **π'** e **π''**, ovvero le tracce **T'r** e **T''r** della retta rispettivamente sui due quadri **π'** e **π''**.
Sia data una retta r e due punti **A**, **B** appartenenti ad essa.
Le proiezioni **r'** e **r''** della retta passano per le proiezioni omonime dei due punti considerati.

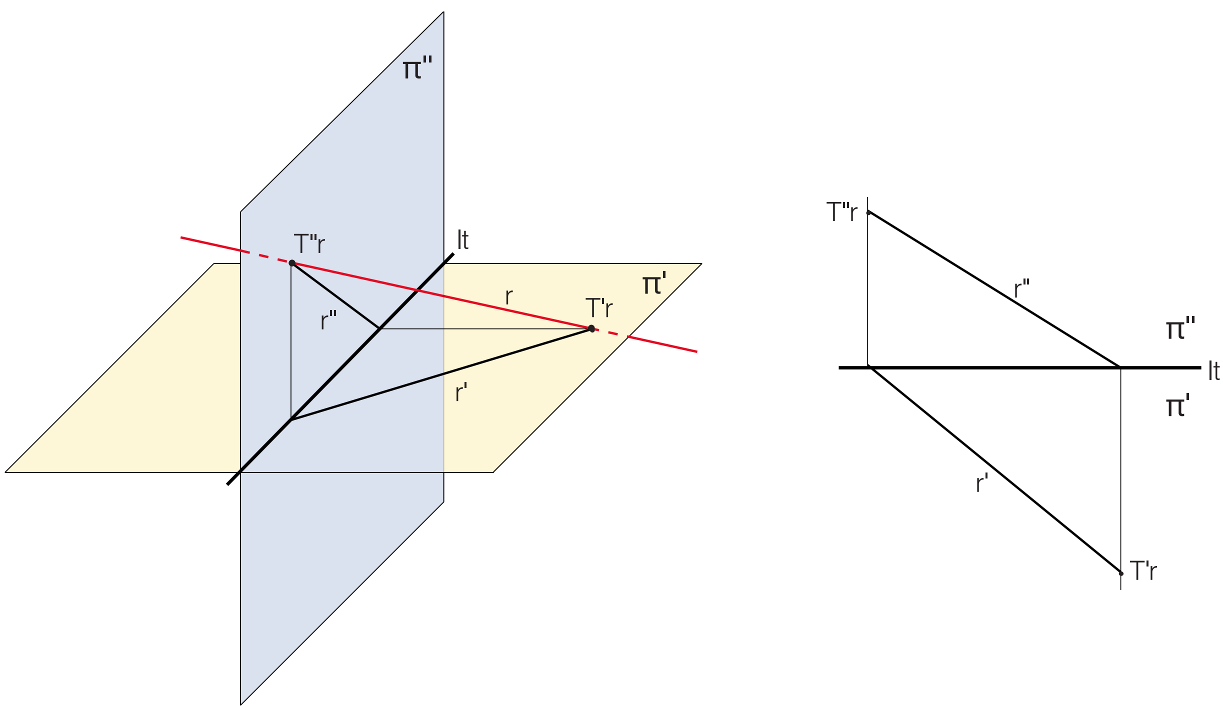




retta r passante per due punti A, B.

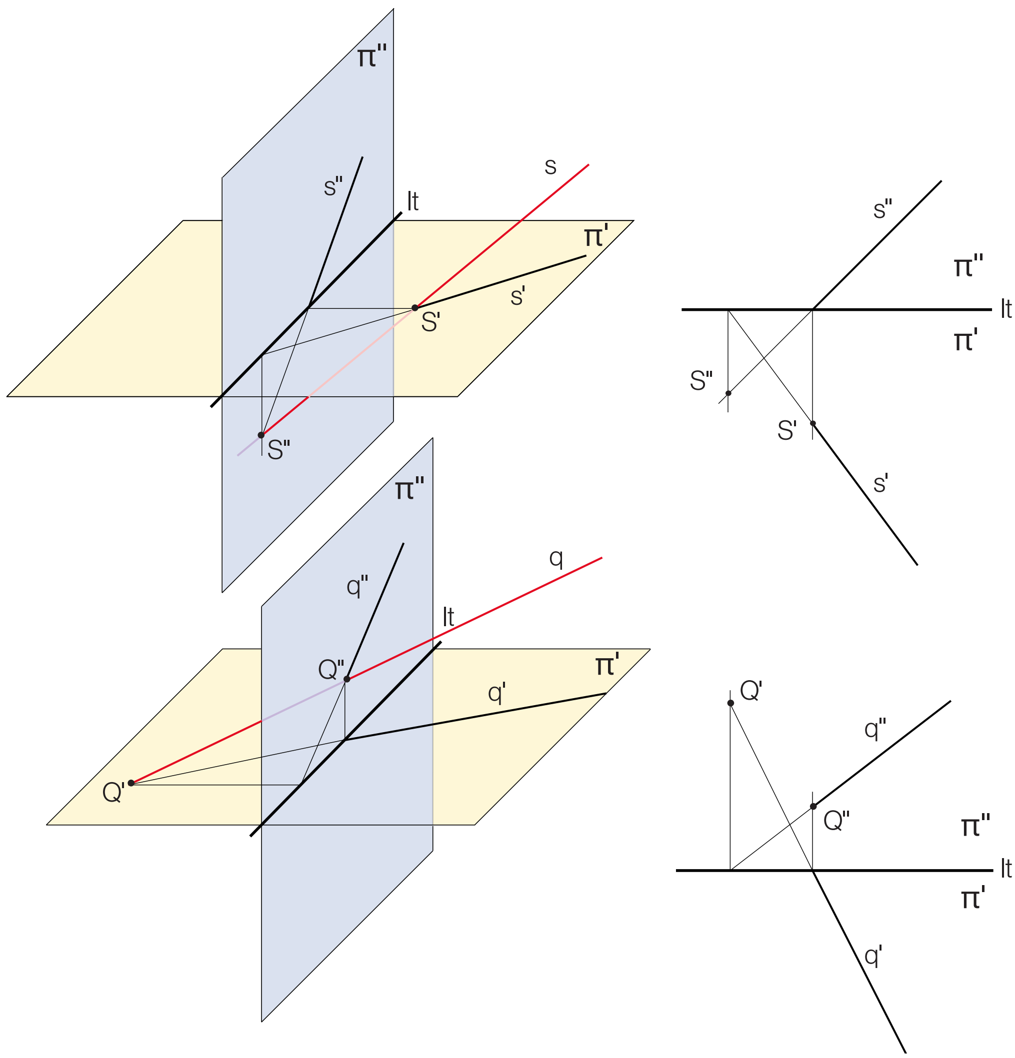
La traccia

I punti di intersezione della retta con i piani di proiezione sono detti tracce della retta. Chiamata r la retta considerata, si indica con:
T'r la traccia su **π'** (prima traccia), **T''r** la traccia su **π''** (seconda traccia).
Le tracce, appartenendo ai piani di proiezione, hanno rispettivamente la seconda e la prima proiezione sulla linea di terra.
La figura 6 rappresenta delle rette, le cui tracce sono in posizioni diverse. E' da porre attenzione alla posizione assunta dalle tracce dopo il ribaltamento di **π'** su **π''**.
E' evidente dalla figura come, assegnate le tracce di una retta, è immediato determinare le proiezioni ortogonali della retta stessa.



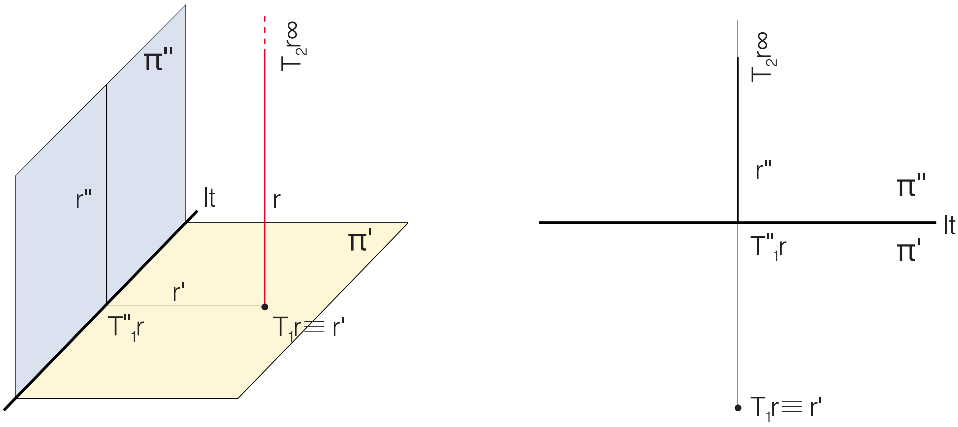
rette con tracce in posizioni diverse.

Ogni retta ha due tracce che possono essere proprie o improprie (quando r è parallela a uno dei quadri).
Ogni traccia è un punto e, quindi ha due proiezioni: una su T1r'T1r'' e T2r'T2r'', rispettivamente prima e seconda proiezione della prima traccia e della seconda traccia di r.

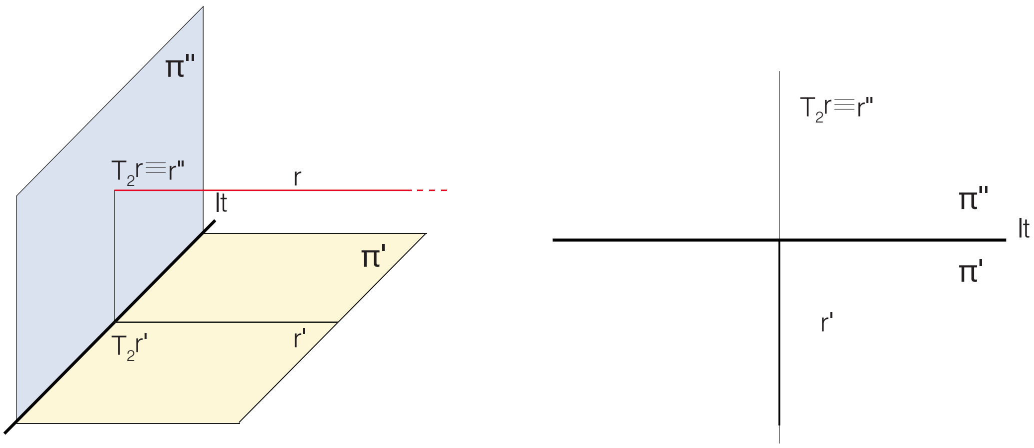


Posizioni particolari della retta

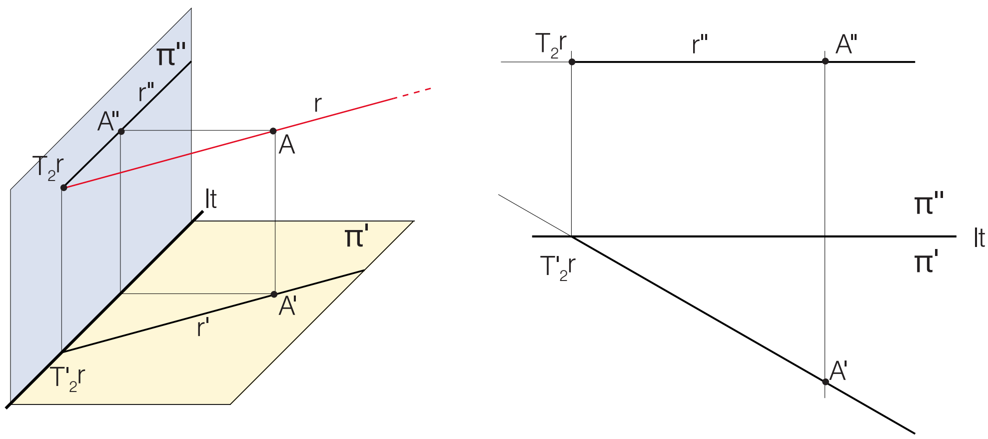
Le figure che seguono rappresentano la retta in alcune posizioni particolari.



retta perpendicolare a **π'** (verticale).



retta perpendicolare a **π''**

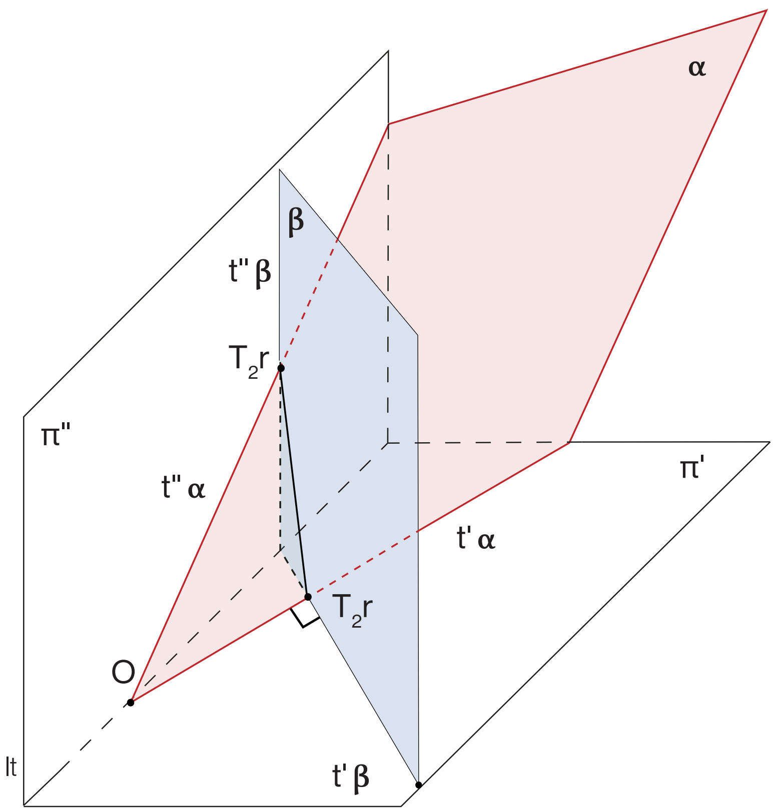


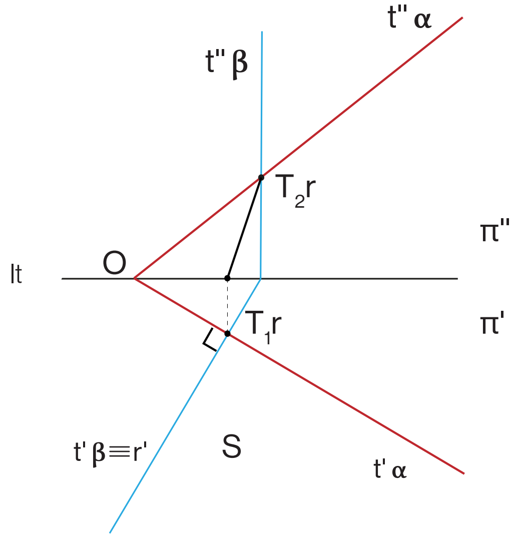
retta orizzontale

Rappresentazione del piano

Ricordiamo che un piano può essere individuato da :
- tre punti non allineati;
- una retta e un punto esterno ad essa;
- due rette incidenti in un punto (proprio o improprio).

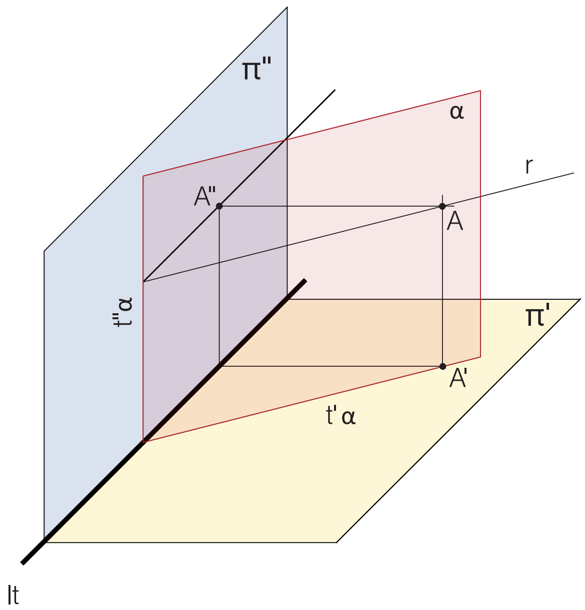
Risulta conveniente rappresentare il piano attraverso rette di intersezione: le sue tracce che sono le rette di intersezione del piano dato con i piani di proiezione: che sono le sue tracce **T'** su **π'** e **T''** su **π''**.
Se il piano è parallelo a uno dei quadri, la traccia relativa è impropria.
Se il piano è parallelo alla linea di terra, il punto di incontro è un punto improprio; le tracce sono parallele tra loro e alla linea di terra. Le tracce di un piano generico si incontrano sempre sulla l. Per misurare l'angolo con **π'** bisogna prendere un piano ausiliare **α** perpendicolare a **T'** (lo stesso per **π''**). La pendenza del piano è l'angolo della retta di massima pendenza rispetto a **π'**, sempre perpendicolare alla **T'**.

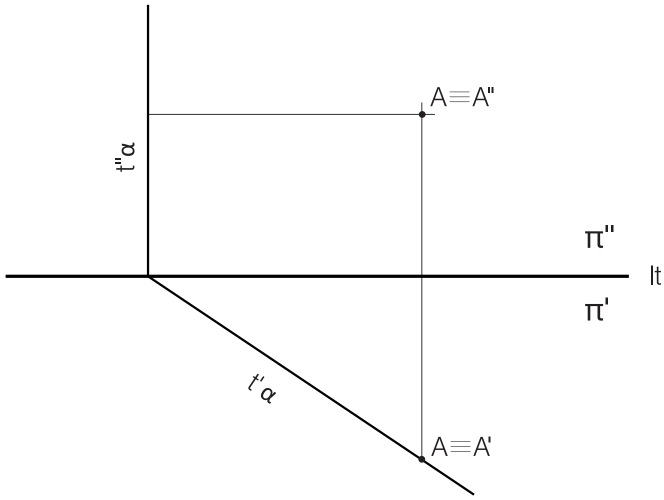




Piani in posizioni particolari: piani proiettanti

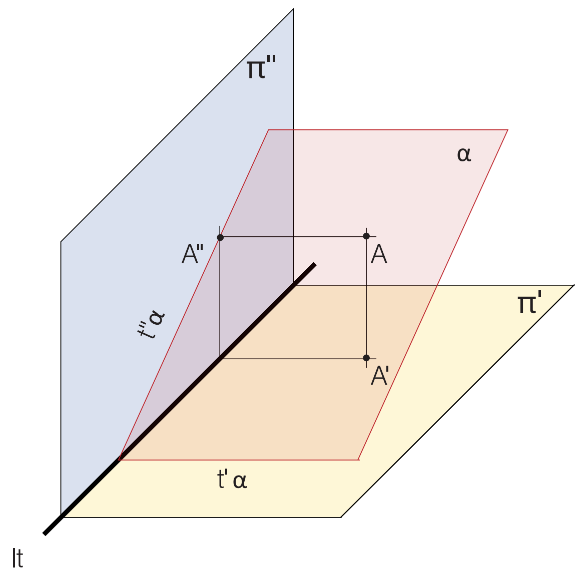
I piani perpendicolari ai piani di proiezione sono detti piani proiettanti.
Un piano proiettante perpendicolare a **π'** è detto piano primo proiettante; la sua prima traccia contiene la prima proiezione di qualunque punto o retta appartenenti al piano stesso e la sua seconda traccia è perpendicolare alla linea di terra.

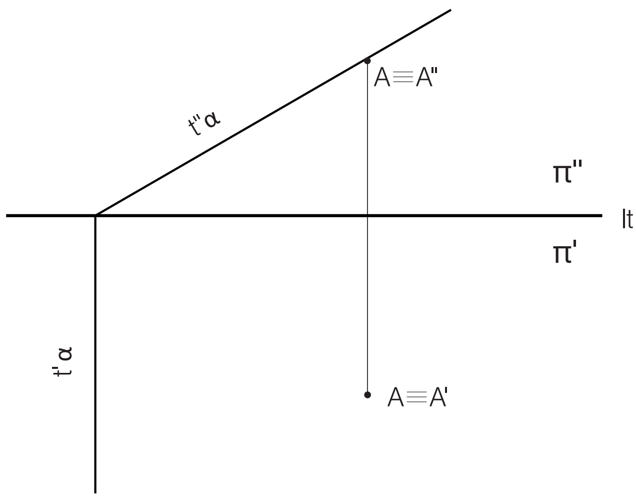




α = piano primo proiettante.

Un piano perpendicolare al piano di proiezione verticale **π''** si chiama piano secondo proiettante ed ha caratteristiche analoghe a quelle del piano precedente.





α = piano secondo proiettante.

2.1
2.2
2.3
2.4

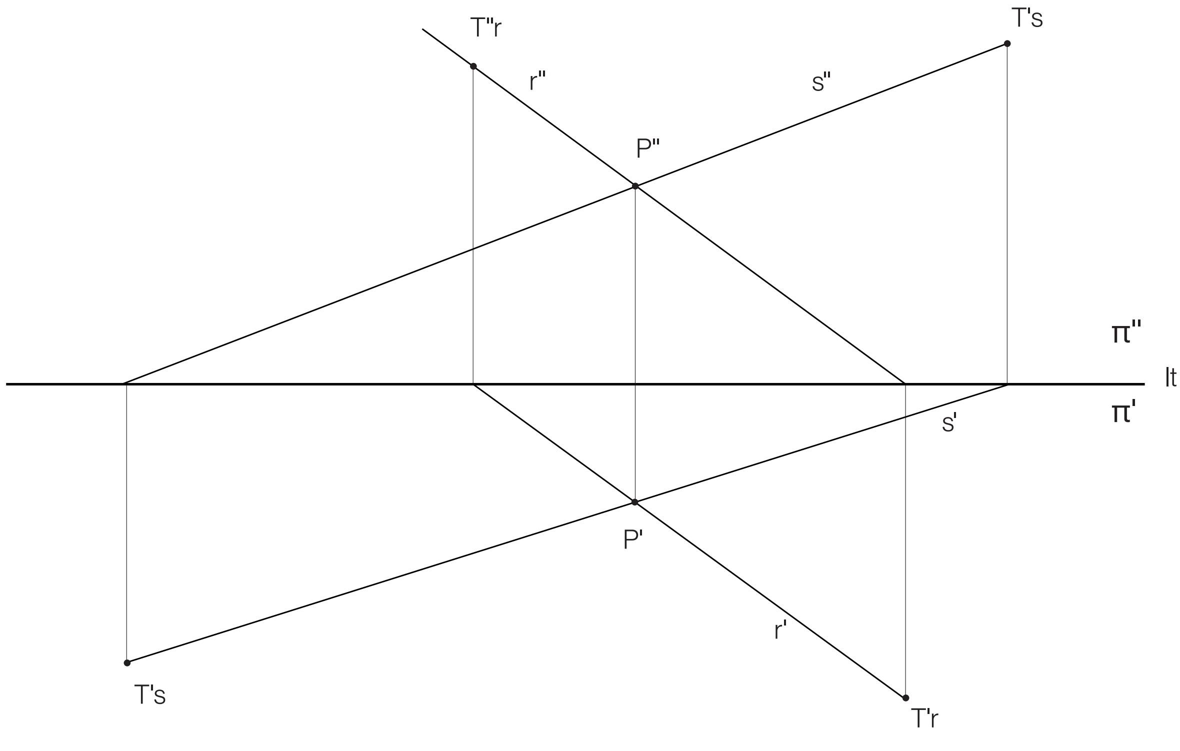
2.3 Condizioni geometriche

Appartenenza

Appartenenza tra punti:
Due punti sono coincidenti se sono coincidenti le rispettive proiezioni omonime.

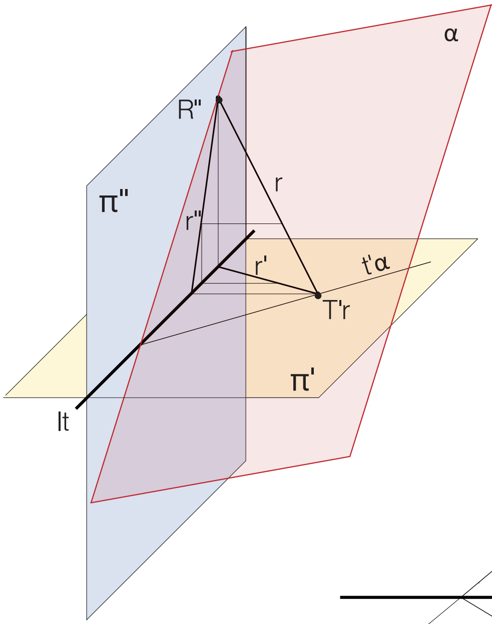
Appartenenza tra punto e retta:
Un punto appartiene a una retta quando le proiezioni del punto appartengono alle proiezioni omonime della retta.

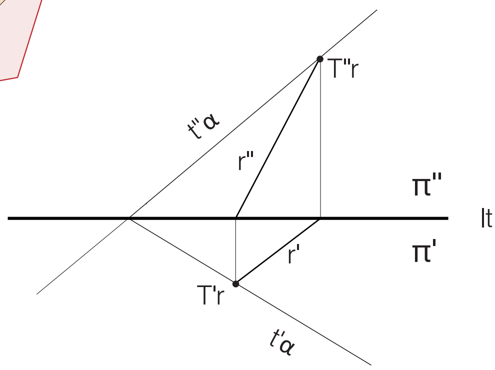
Appartenenza tra rette:
Due rette sono incidenti quando hanno un punto in comune. Infatti, solo in questa condizione, le intersezioni delle proiezioni delle rette rappresentano un punto dello spazio (il punto di intersezione).



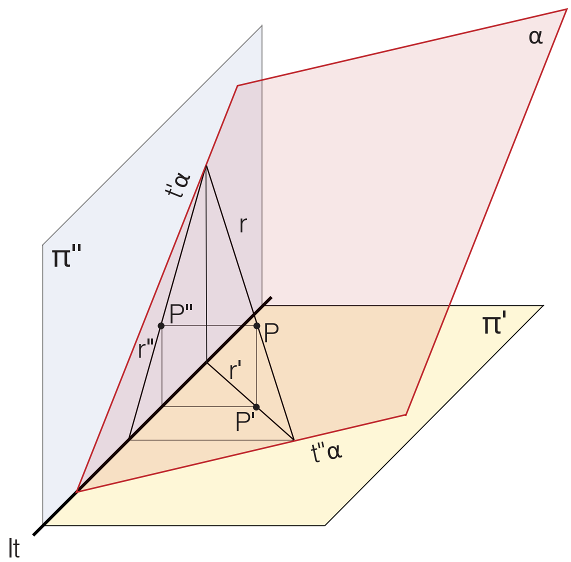
proiezioni ortogonali di due rette incidenti.

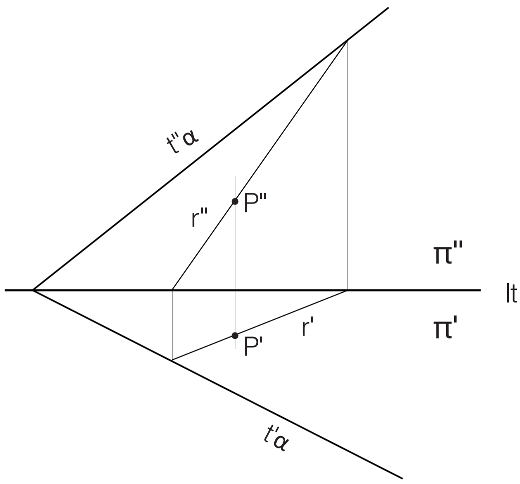
Appartenenza tra retta e piano:
Una retta **r** appartiene ad un piano **α** quando le tracce della retta stanno sulle tracce omonime del piano.





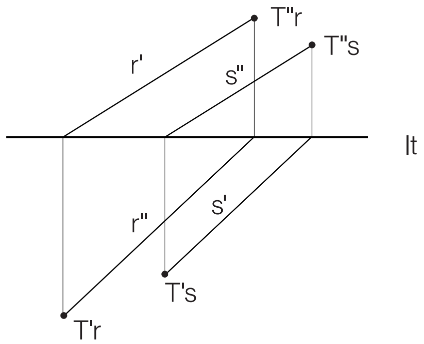
Appartenenza tra punto e piano:
Condizione necessaria e sufficiente affinché un punto **P** appartenga ad un piano **α** è che esso appartenga ad una retta **r** del piano.



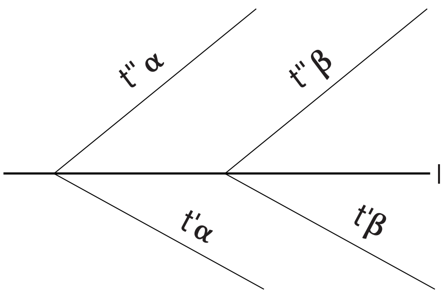


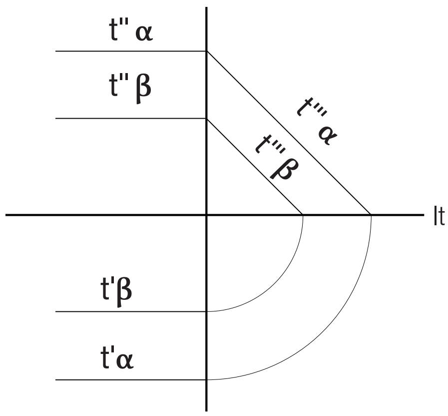
Parallelismo

Parallelismo tra rette:
Due rette sono parallele se le loro proiezioni omonime sono parallele.

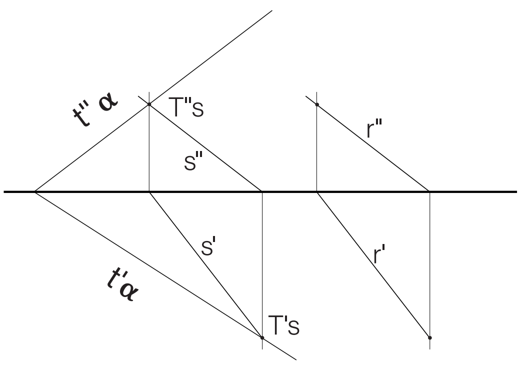


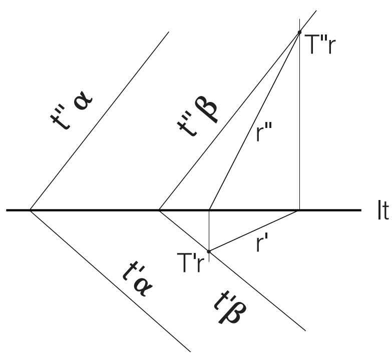
Parallelismo tra piani:
Due piani sono paralleli se hanno le tracce omonime parallele. Nel caso particolare di piani paralleli alla linea di terra, è necessario considerare anche le terze tracce sul piano di proiezione laterale.





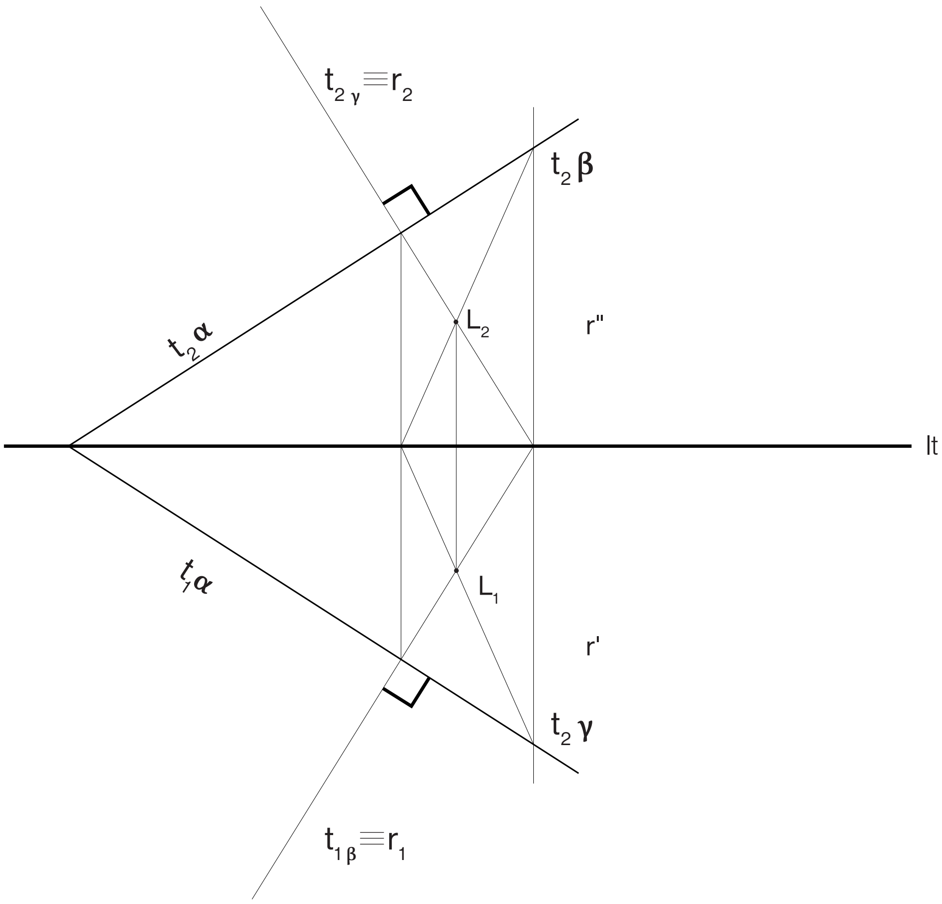
Parallelismo tra retta e piano:
Una retta r è parallela a un piano generico α se sul piano è possibile tracciare una retta s parallela a quella data, oppure se è possibile tracciare un piano (β) passante per la retta stessa e parallelo a quello dato.





Condizioni di perpendicolarità

Perpendicolarità tra retta e piano:
Una retta è perpendicolare a un piano quando le proiezioni della retta sono perpendicolari alle rispettive tracce del piano. La retta r può considerarsi come intersezione di due piani β ortogonale su **π'** e γ ortogonale su **π''** con α.

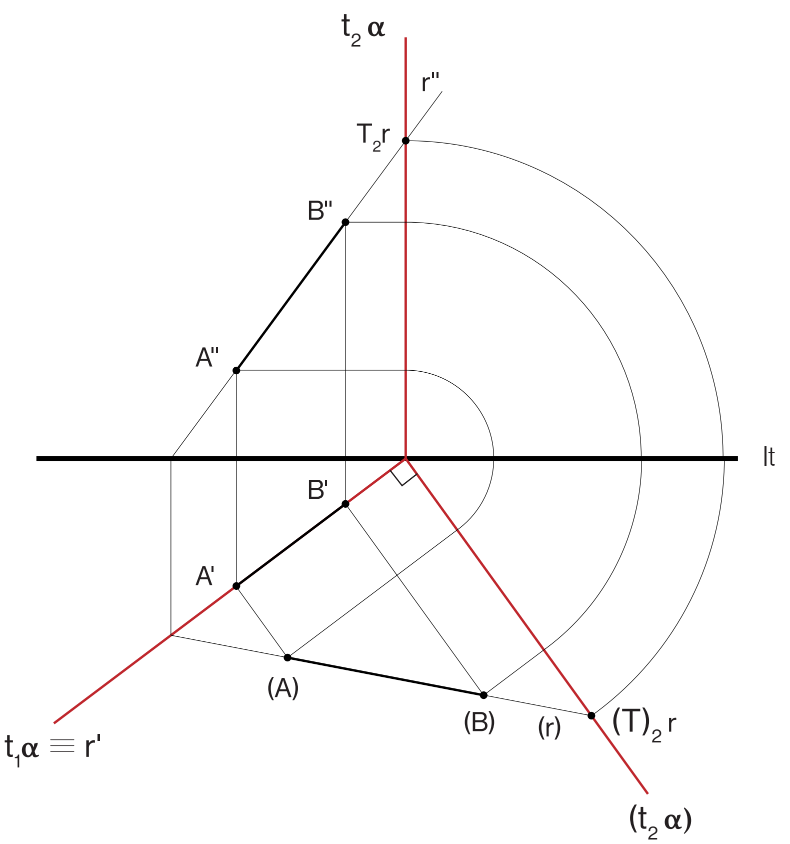


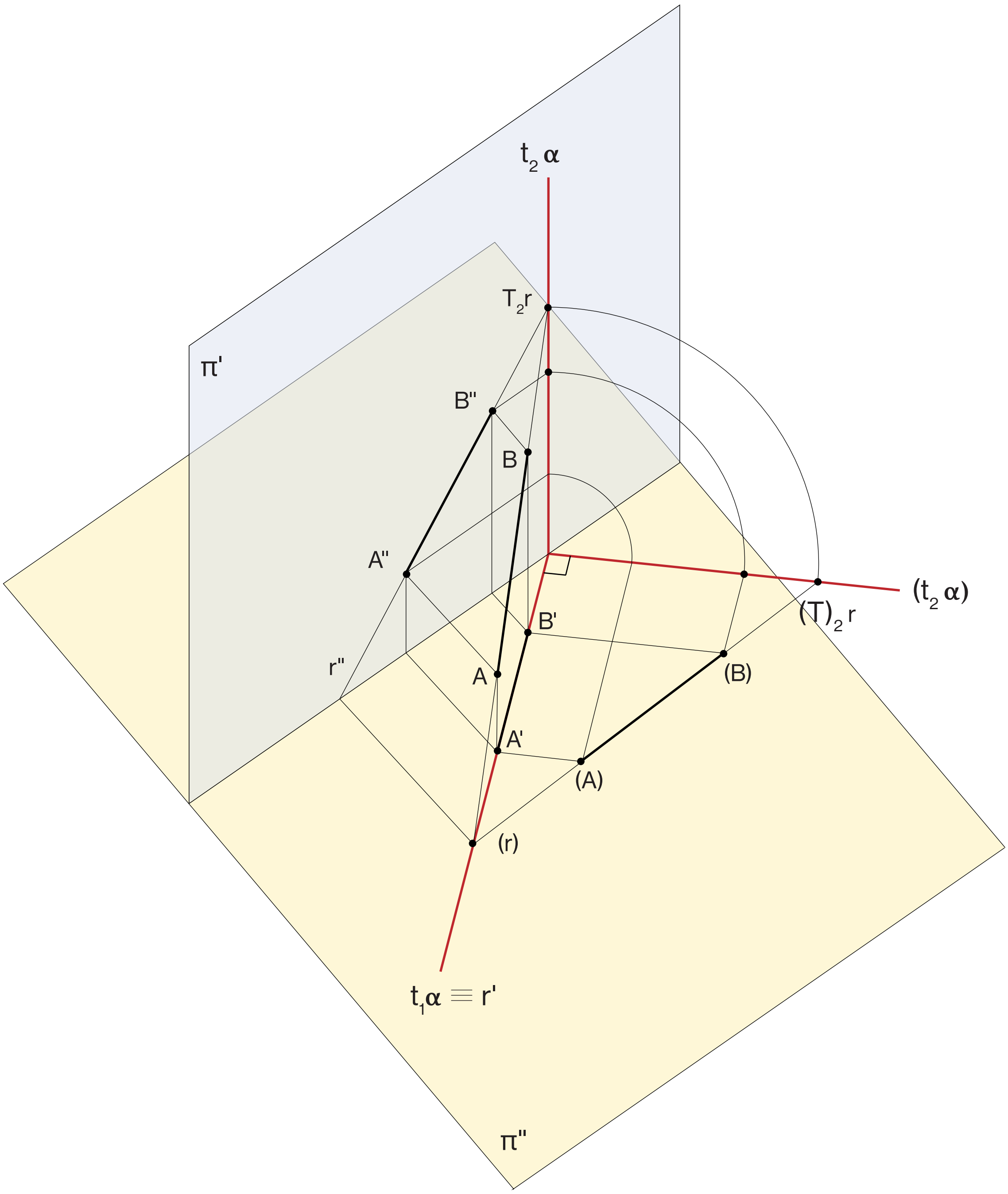
2.4 Vera misura

Per misurare la vera grandezza di elementi non paralleli ai piani proiettanti, quindi scorciati, bisogna renderli "accessibili": per farlo basta ribaltarli su uno dei quadri di proiezione, ribaltando un piano ausiliario che li contiene intorno alla loro retta comune (asse del ribaltamento).
Per comodità conviene prendere un piano proiettante, orizzontale o verticale a seconda dell'inclinazione del segmento.

Esempio:
dati due punti **A** (**A'A"**) e **B** (**B'B"**) si misuri la lunghezza del segmento **AB** (distanza tra i due punti)
• la prima proiezione **A'B'** giace su **r'**, prima traccia del piano proiettante **α**, unico piano verticale per AB e asse del ribaltamento sul quadro omonimo **π'**.
• come noto, nel ribaltamento tutti i punti del piano ruotano con raggio pari alla loro distanza dall'asse, quindi per ribaltare **α** (perpendicolare a **π"**) è sufficiente ribaltare la **t"α**.
• quindi ribaltando **T"r** in **(T"r)** e congiungendo **(t"r)** con **t'r** con si trovano i punti **(A)** e **(B)**, estremi del segmento **(AB)** e la vera grandezza del segmento, individuato dai ribaltamenti delle rette proiettanti **AA'** e **BB'** (perpendicolari a **t'α** da' **A'** e **B'**).

In questo modo si può misurare l'angolo tra la retta **r** e **π'** (pendenza).
In modo analogo si può risolvere il problema ribaltando il piano proiettante **β** su **π"** intorno a **t"β** (che coincide con **r"**) e tracciando le perpendicolari per **A"**, **B"**. Così si misura l'angolo tra la retta **r** e **π"**.





t2 α
T2r
π'
B''
B
A''
B'
r''
A
A'
(A)
(B)
(r)
(T)2 r
(t2 α)
t1α ≡ r'
π''

In caso di figure appartenenti (da misurare o costruire) ad un piano generico, risulta conveniente ribaltare l'intero piano intorno ad una delle sue tracce su uno dei piani di proiezione. Quindi ci sono due possibili ribaltamenti per ciascuno dei piani di proiezione.

Ad esempio:

Ribaltamento del piano generico **α** su **π'**:

• si ribalta un punto qualsiasi della traccia **t"α** su **π'** ribaltando un piano ausiliario verticale **β** su **π'** (vedi esempio precedente),

• si ribalta la retta di massima pendenza **r** (retta di intersezione tra **α** e **β**) in **(r)** misurando l'angolo **ω** rispetto a **π'**.

• infine si ribalta **α** su **π'** ribaltando un punto del segmento **T'r(Tr)** che è comune a due piani **α**, **β**, ricordando che il ribaltamento di ogni punto lo ruota intorno all'asse con raggio pari alla sua distanza dallo stesso

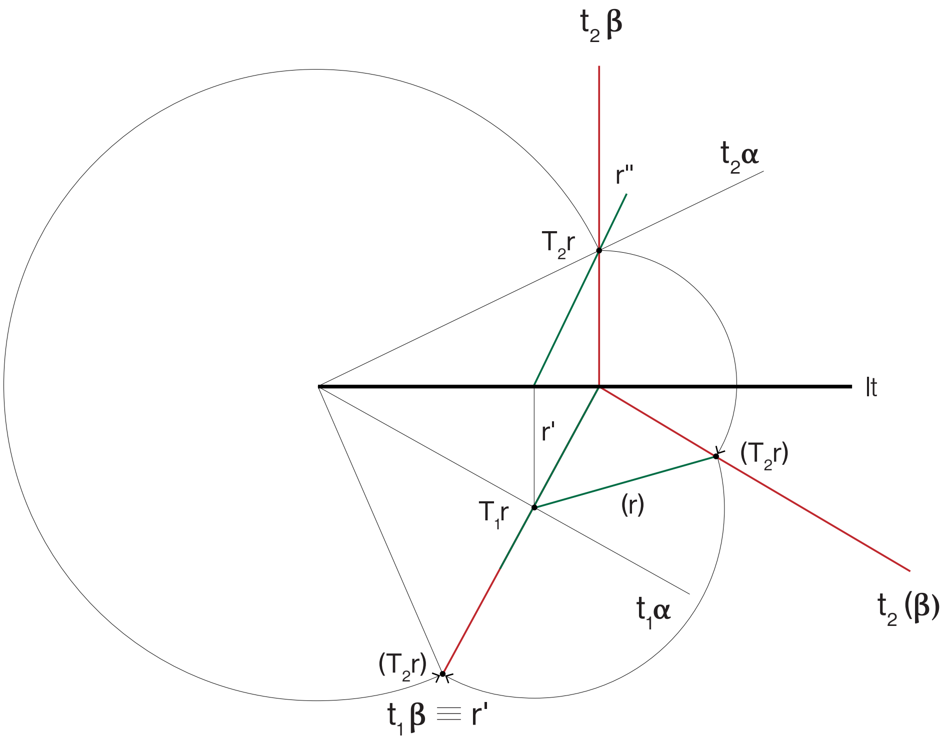
• quindi **(T"r)** si ribalta su **π'** in **(T"r)** facendo centro in **T'r** sul prolungamento di **r'** coincidente con **T'β**.

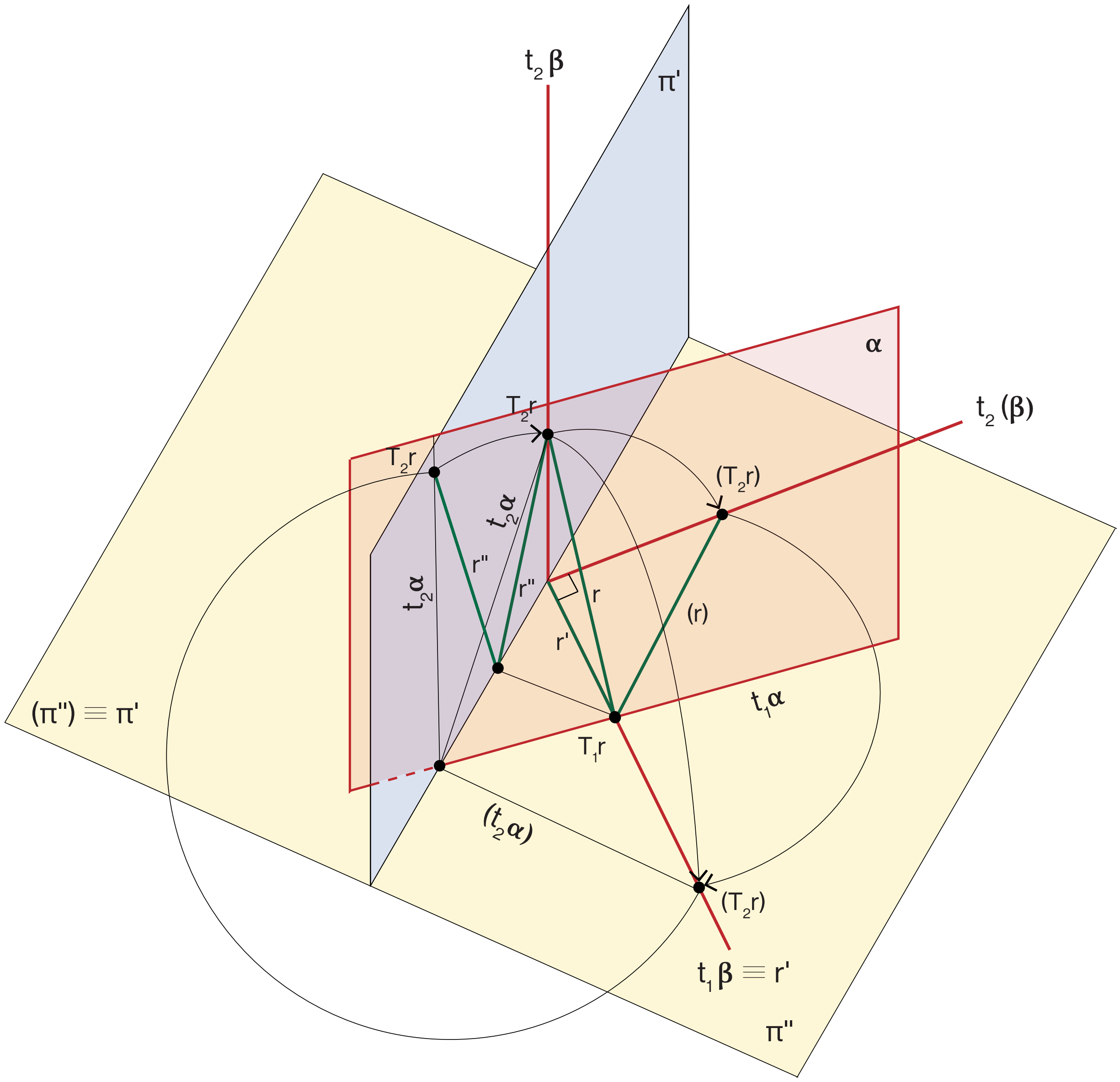
Noto il ribaltamento di un punto di **α** su **π'** e l'asse del ribaltamento **t'α** si procede tenendo conto della corrispondenza biunivoca tra la prima proiezione dei punti di **α** su **π'** e il loro ribaltamento (omologia di ribaltamento) per cui rette corrispondenti si incontrano sull'asse e punti corrispondenti sono allineati con il centro (direzione del ribaltamento, perpendicolare all'asse). Il ribaltamento di **α** su **π'** può essere determinato anche ribaltando direttamente **t"α** su **π'**:

infatti **t"α** è in vera grandezza e posso prendere un punto qualsiasi su di essa e ribaltarlo dal punto **K** comune a **t'α**, **t"α** secondo il piano verticale di appartenenza; il punto si troverà dove il raggio O interseca

t'β, piano verticale del ribaltamento del punto di **T"α**.

FILMATO




t₂ β
π'
α
t₂ (β)
T₂r
T₂r
(T₂r)
t₂α
t₂α
r"
r"
r
(r)
r'
(π") ≡ π'
T₁r
t₁α
(t₂α)
(T₂r)
t₁ β ≡ r'
π"

3. Assonometria

3.1 Introduzione

L'assonometria è un metodo grafico di rappresentazione degli oggetti nello spazio tridimensionale descritto da Monge nel trattato di "Géométrie descriptive", edito nel 1794.
Essa si sviluppa nel XIX sec. come metodo di rappresentazione in ambito militare (assonometria cavaliera militare) e diventa di uso comune per la rappresentazione di sistemi costruttivi nei manuali della seconda metà del XIX sec.
Nel XX secolo gli architetti del De Stil e del Movimento Razionalista (Gropius, Mies Van der Rohe, ecc.) hanno fatto largo uso dell'assonometria nel disegno di architettura, tradizione che prosegue con gli strutturalisti (Wachsmann) per le possibilità che questa rappresentazione offre per raffigurare i reticoli spaziali e modulari architettonici e costruttivi.

L'assonometria è un caso particolare di **proiezione da un punto improprio**, che quindi genera una **proiezione parallela cilindrica su un quadro π genericamente orientato rispetto a una terna di assi ortogonali** di riferimento. Poichè la rotazione dei riferimenti rispetto al quadro evidenzia la forma tridimensionale, l'assonometria è detta anche *prospettiva parallela*. La direzione del centro improprio **C^{∞}** rispetto al **quadro π** deve essere distinta dalla direzione dei tre assi.
Tra le molteplici combinazioni possibili si possono individuare delle classi e dei tipi di assonometria che rappresentano dei casi particolari.
Una prima suddivisione deriva dalla direzione del centro improprio rispetto al quadro **π** e individua due classi: **assonometrie ortogonali e assonometrie oblique**, che corrispondono rispettivamente a una direzione di proiezione ortogonale o genericamente inclinata rispetto al quadro.
L'assonometria ortogonale produce immagini meno distorte, e quindi più verosimili, per questo quella obliqua viene usata solo in alcuni casi particolari come l'assonometria cavaliera, la cavaliera militare e le assonometrie speciali; in tutti questi casi il quadro è parallelo a uno dei tre assi coordinati con evidente vantaggio esecutivo.
Infatti l'assonometria cavaliera mantiene inalterata la proiezione degli elementi paralleli al quadro, è quindi molto usata nel disegno tecnico e nella manualistica per rappresentare la forma di elementi tecnici.
Se il quadro è orizzontale (assonometria militare) si mantengono inalterate le piante con grande vantaggio per la rappresentazione dell'architettura e del territorio. L'assonometria speciale invece è un caso particolare poco usato, che genera immagini molto piatte e poco riconoscibili nella loro forma spaziale.

Spessori di linea nel disegno

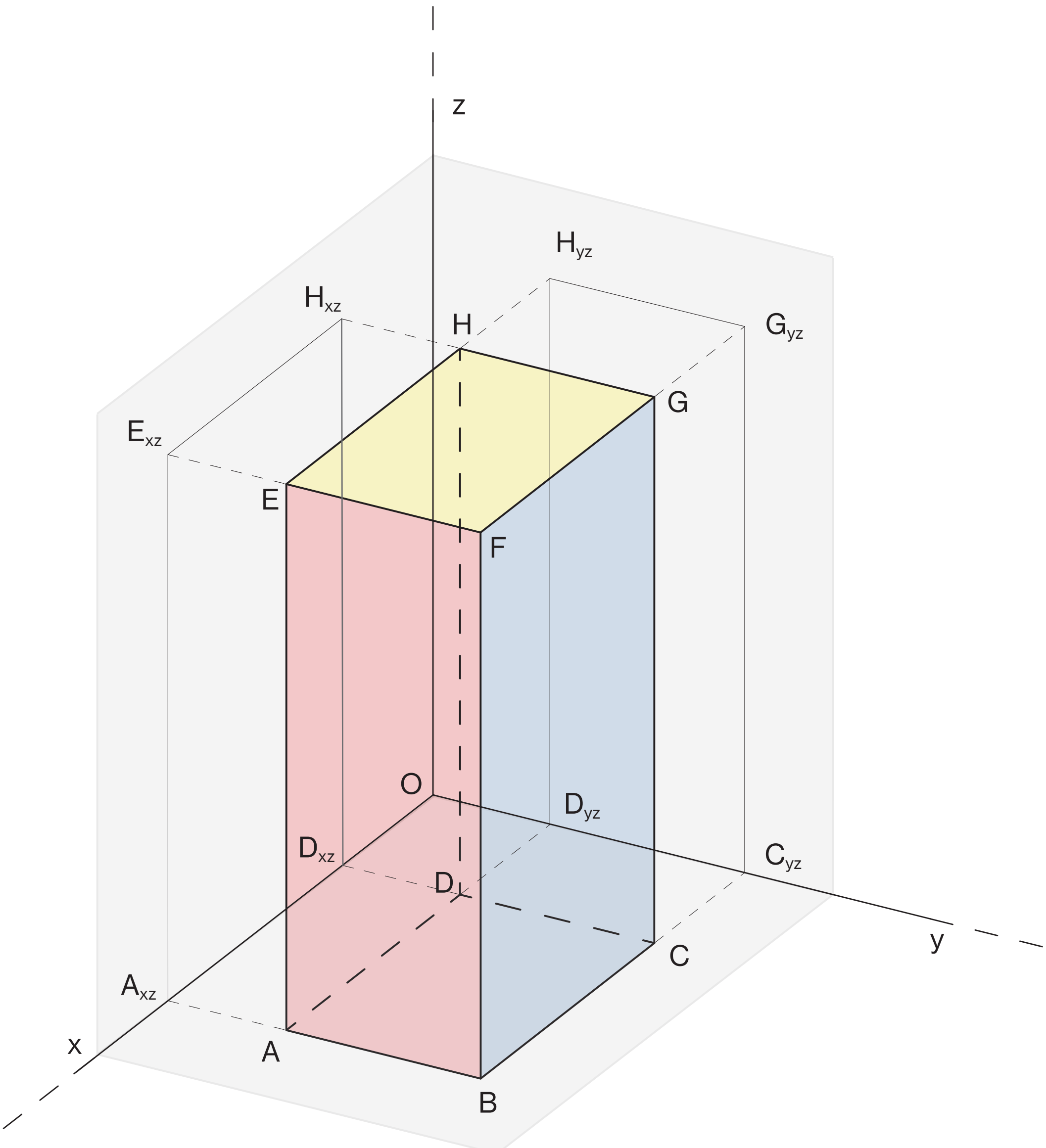
linee grosse per le proiezioni ortogonali e per gli spigoli in vista della figura in assonometria

linee sottili per le proiezioni ortogonali della figura riportate in assonometria

linee medie per gli assi cartesiani

linee grosse tratteggiate per gli spigoli non in vista della figura in assonometria

linee sottili tratteggiate per le linee di costruzione



3.2 Elementi della proiezione

L'assonometria è una proiezione parallela da un centro improprio **C^{∞}**, su un piano di proiezione **π**, detto quadro, secondo una direzione ortogonale oppure obliqua.
Il riferimento spaziale associa i punti nello spazio ad una terna di assi cartesiani triortogonali **x**, **y**, **z**, generati dall'intersezione dei tre piani (**π_1, π_2, π_3**) coordinati di riferimento, che vengono proiettati sul piano **π**, insieme ai punti nello spazio.
Le intersezioni (**t_x, t_y, t_z**) dei tre piani coordinati cartesiani (**π_1, π_2, π_3**) con il quadro (**π**) sono i lati del triangolo delle tracce (sempre acutangolo e con vertici **T_x, T_y, T_z**) all'interno del quale l'origine O si proietta in O', indipendentemente dalla direzione di **C^{∞}**.
Se la direzione di proiezione (**C^{∞}**) è ortogonale a **π**, **O** si proietta in **O'** nell'**ortocentro** del triangolo delle tracce e avremo un'assonometria ortogonale, mentre se la direzione è obliqua si proietta in **O^0** diverso da **O'** e avremo un'assonometria obliqua.
La disposizione dell'oggetto rispetto alla terna cartesiana può essere scelta arbitrariamente, benché sia più conveniente disporlo con gli spigoli principali paralleli agli assi **x, y, z**.
Anche la scelta della direzione di proiezione e la giacitura del quadro **π** sono libere, ma la varietà delle combinazioni possibili nella reciproca collocazione degli enti nello spazio, è determinante nella rappresentazione delle caratteristiche angolari e metriche dell'oggetto, per cui l'efficacia della disegno dipende dalla scelta dell'orientamento spaziale e di fatto si usano le assonometrie ortogonali e cavaliere..

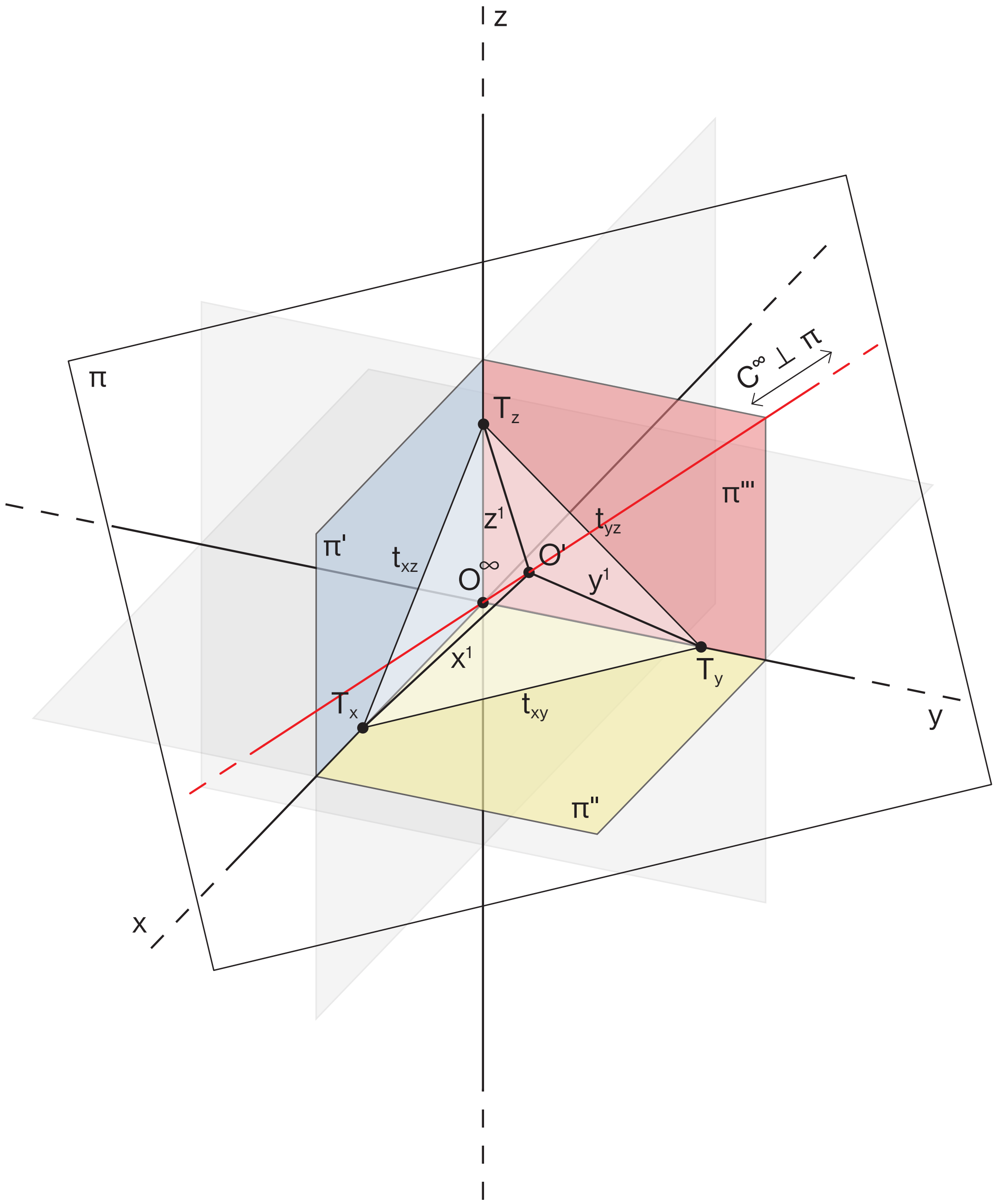
Riassumendo, gli **elementi fondamentali** nella costruzione di un'assonometria sono:

1 . Una terna di assi ortogonali x, y, z che definisce tre piani ortogonali **xy ≡ π_1, xz ≡ π_2, yz ≡ π_3**.

2. Il triangolo delle tracce è sempre acutangolo. Esso delina l'intersezione del quadro con i tre piani coordinati e permette di misurare la posizione dei piani nello spazio.

3. Un piano detto **quadro** (**π**), sul quale vengono proiettati gli assi **x**, **y**, **z**, giacenti nello spazio. Per semplicità si fa coincidere il quadro con il foglio da disegno.

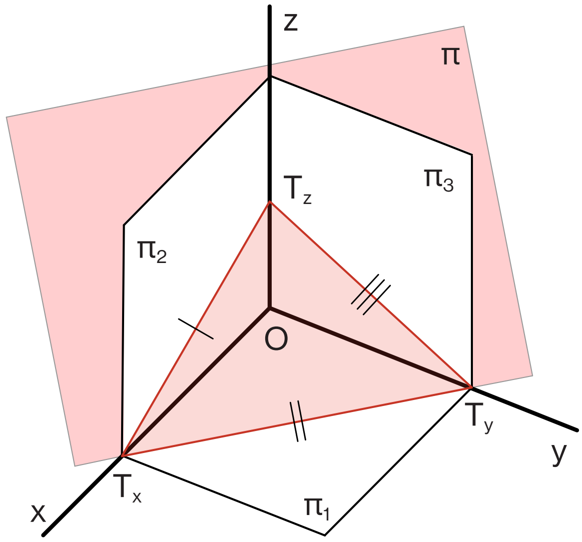
4. Una direzione di proiezione che proietti il sistema di assi cartesiani sul quadro in **x'**, **y'**, **z'** con origine **O'**.


z
π
π'
π''
π'''
T_z
T_x
T_y
t_{xz}
t_{yz}
t_{xy}
z^1
x^1
y^1
O^∞
O'
$C^\infty \perp \pi$
x
y

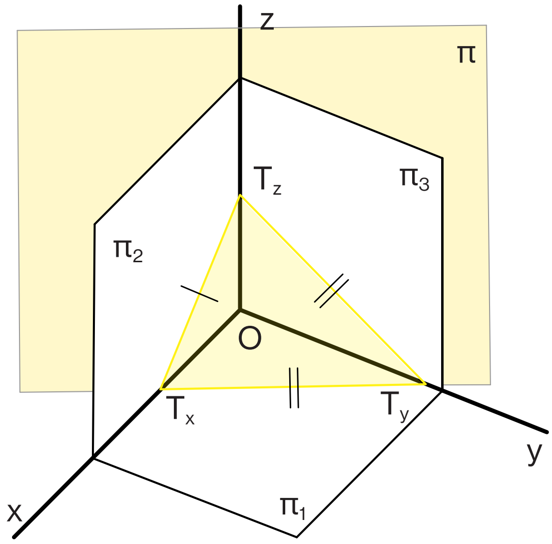
3. Assonometria

Triangolo delle tracce

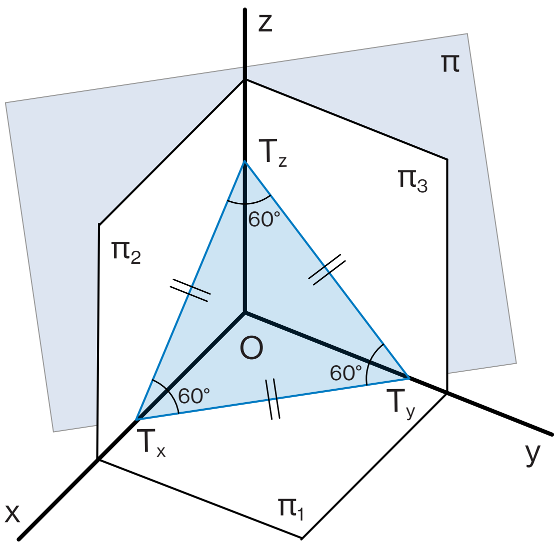
L'assonometria è detta anche *prospettiva parallela* per la capacità di visualizzare la tridimensionalità senza perdere il parallelismo, quando si ruota il quadro **π** rispetto agli assi di riferimento.
Lo spazio proiettivo è continuo e uniforme, per questa ragione possiamo immaginare di ruotare il quadro **π** e di lasciare fermo l'oggetto rispetto agli assi di riferimento e, una volta fissato il quadro, ruotare la direzione di un unico centro improprio rispetto ai tre assi cartesiani, proiettando il centro su un piano generico ripetto ad essi. Cambierà la forma del triangolo delle tracce e la direzione dei tre assi assonometrici (proiezione della terna di assi cartesiani).
È intuitivo che l'immagine con **C$^\infty$** ortogonale a **π** sia analoga a quelle ottenute nelle P.O. di un oggetto posto sul piano generico. Avendo centro improprio, anche l'assonometria mantiene inalterato il parallelismo e prende il nome di assonometria per il riferimento della proiezione a tre assi ortogonali **x, y, z**, con origine comune **O** (assi cartesiani).
Ruotando la giacitura del quadro **π** rispetto agli assi **x**, **y**, **z** cambia la forma del triangolo delle tracce, che è sempre acutangolo (l'angolo di intersezione tra due piani ortogonali con un terzo obliquo è sempre < 90°), può essere scaleno, isoscele o equilatero. Si avranno di conseguenza 3, 2, 1 unità di misura diverse su tre assi cartesiani.
Poiché si tratta di un metodo scientifico dimostrato matematicamente (tutte le proiezioni hanno base matematica), anche se con notevole ritardo rispetto agli altri metodi, essa consente di risolvere tutti i problemi di misura e di costruzione, a patto di conoscere la direzione del centro di proiezione **C∞**, rappresentata dalla posizione di **O'**, proiezione dell'origine **O** della terna cartesiana, rispetto alle tracce dei tre assi **x, y, z** sul quadro **π** (vertici del triangolo delle tracce).
Se **C∞** è perpendicolare al quadro e solo in quel caso, **O'** coincide con l'ortocentro (intersezione delle altezze) del triangolo stesso; in tutti gli altri casi sarà in un punto differente, ma sempre interno al triangolo delle tracce, che per costruzione è sempre acutangolo. Conoscendo il triangolo delle tracce è sempre possibile determinare lo scorciamento dell'unità di misura sui tre assi ortogonali e misurare qualsiasi punto dello spazio rispetto ad essi.
Le operazioni di ribaltamento e misura degli elementi ruotati rispetto ai tre assi cartesiani sono meno agevoli ed immediate rispetto alle P.O. e pertanto l'assonometria è usata in prevalenza per la visualizzare la forma di volumetrica di corpi orientati secondo gli assi di riferimento, sui quali è agevoli la determinazione degli scorciamenti proiettivi delle unità di misura assonometriche $\mathbf{u_x}$, $\mathbf{u_y}$, $\mathbf{u_z}$, sui tre assi.
Il disegno infatti risulta molto veloce se si misura la posizione dei punti da rappresentare secondo il suo riferimento cartesiano, ovvero per coordinate, evitando la soluzione dei problemi metrici più complessi comunemente risolti con le P.O. A seconda della giacitura del quadro e della direzione del centro cambia l'angolo degli assi rispetto al quadro, e di conseguenza la rotazione di **x', y', z'** rispetto all'origine **O'** della proiezione della terna cartesiana, quindi lo scorciamento dell'unità di misura che deve essere determinata per ogni singolo asse.



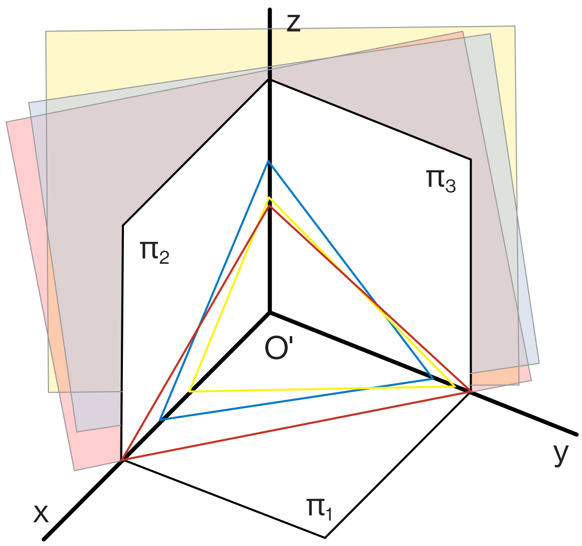
assonometria trimetrica



assonometria dimetrica



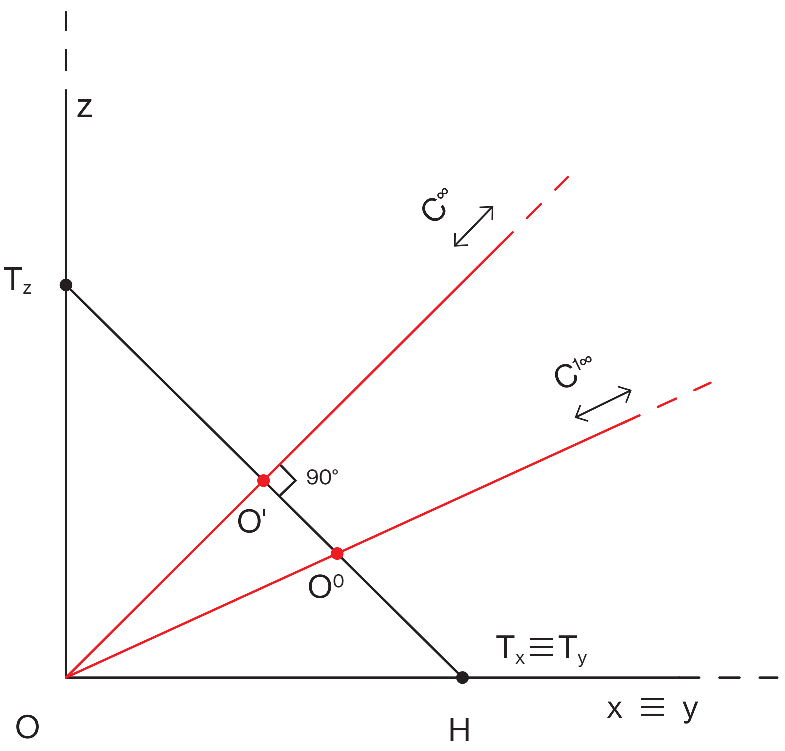
assonometria monometrica



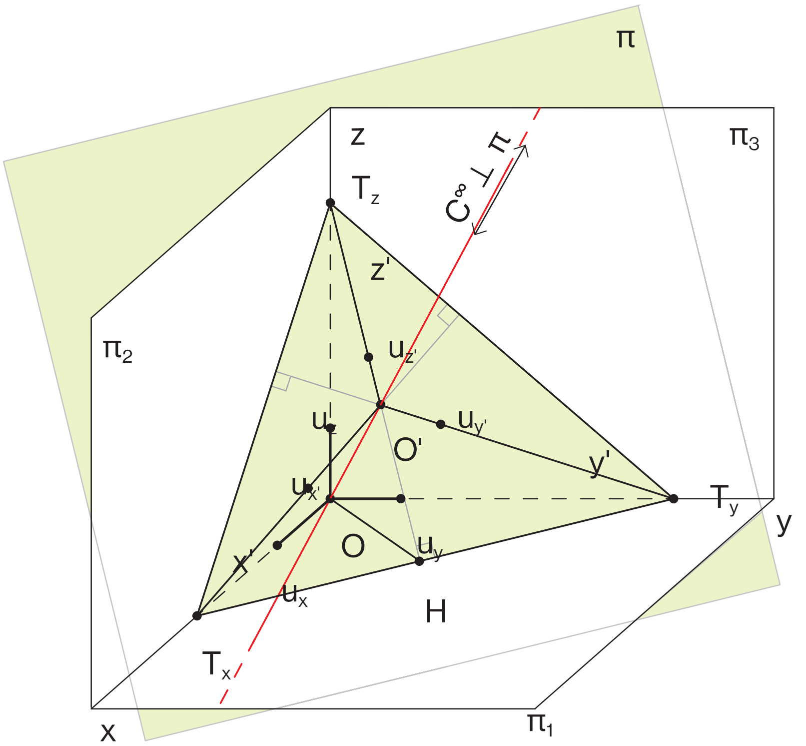
3. Assonometria

Triedro fondamentale e la direzione del centro

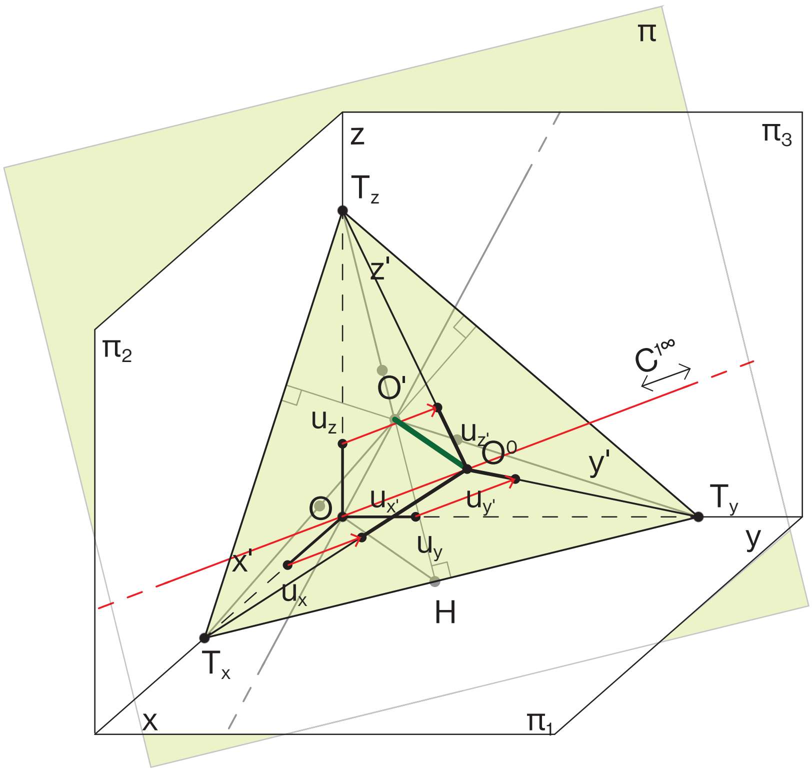
La “fortuna” delle P.A. nel disegno di progetto è legata alla velocità della sua costruzione “diretta”, in riferimento ai tre assi ortogonali del triedro fondamentale dello spazio quando si conoscono le unità di misura assonometriche (sui tre assi) **ux, uy, uz** quindi applicando dei correttivi aritmetici predeterminati sulle unità assonometriche dei tre assi, che sono è possibile ricavare graficamente dopo avere scelto la direzione degli assi in funzione delle necessità della rappresentazione (forma degli oggetti e posizione degli elementi di maggior interesse).
Se il centro di proiezione è ortogonale al quadro **π**, la proiezione dell'origine (**O'**) si trova all'intersezione delle tre altezze del triangolo delle tracce e quindi coincide con l'ortocentro. Se il centro di proiezione è inclinato rispetto a **π** la proiezione **O⁰** è interna al triangolo delle tracce ma non coincide con l'ortocentro.
Se conosco il triangolo delle tracce e la proiezione degli assi, posso ricavare le unità di misura assonometriche **ux, uy, uz** sui tre assi, indipendentemente dalla direzione di **C∞**.
Con **C∞** ortogonale a **π**, **O'** proiezione dell’origine del sistema di riferimento coincide con l’ortocentro del triangolo delle tracce (intersezione delle altezze).
Se **C∞** è obliquo, i tre assi assonometrici non coincidono con le altezze del triangolo ma posso ugualmente determinare le unità assonometriche.
Le assonometrie oblique non sono usate, con l'eccezione dei casi particolari delle assonometrie cavaliere (vedi 3.4).



confronto tra le inclinazioni della
direzione di proiezione



assonometria ortogonale



assonometria obliqua

3.3 Assonometrie ortogonali

Nell'assonometria ortogonale il centro di proiezione ortogonale al quadro **π** fissa la proiezione di **O'** coincidente all'ortocentro del triangolo delle tracce. Inoltre si configurano condizioni proiettive analoghe alle proiezioni mongiane (intersezione delle tre altezze) su un piano generico.
Nel caso in cui piano e quadro assumano inclinazioni e giaciture non parallele, né ortogonali al piano di proiezione non è sempre possibile determinare il triangolo delle tracce e lo scorciamento dell'unità di misura dei tre assi.

Configurazioni angolari

Sul piano di proiezione **π** i tre assi subiscono uno scorciamento dipendente dall'angolo tra **π** e ogni asse, quindi abbiamo rapporti di riduzione diversi per i tre assi (e per ogni altra direzione dello spazio).
Il rapporto di riduzione sui tre assi può essere determinato per via grafica ribaltando gli assi sul quadro, allo stesso modo è possibile ribaltare sul quadro ogni altra direzione.

A seconda della giacitura del quadro **π** e quindi della forma del triangolo delle tracce si possono verificare tre condizioni:

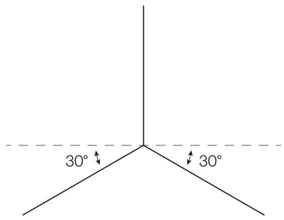
• **assonometria ortogonale isometrica** (o monometrica) quando il triangolo delle tracce è equilatero e le proiezioni dei tre assi ortogonali sono uguali, con tre settori di 120° tra gli assi e l'accorciamento delle rispettive unità di misura assonometriche $\mathbf{u_x}$, $\mathbf{u_y}$, $\mathbf{u_z}$.

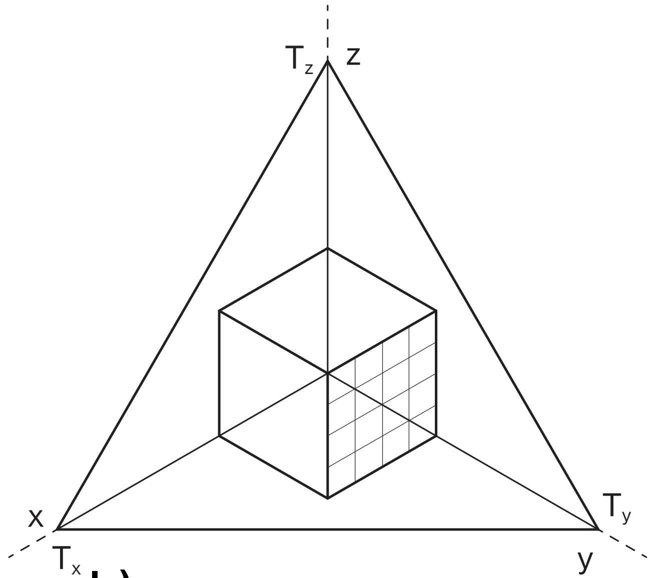
• **assonometria ortogonale dimetrica**, quando il triangolo delle tracce è isoscele, quindi due dei tre angoli tra gli assi e il quadro assumono la stessa grandezza e lo stesso accade per i valori che regolano la deformazione delle rispettive unità di misura assonometriche.

• **assonometria ortogonale trimetrica** quando il triangolo delle tracce è scaleno, e gli angoli tra gli assi e il quadro, sono diversi tra loro, come le relative unità di misura $\mathbf{u_x}$, $\mathbf{u_y}$, $\mathbf{u_z}$.

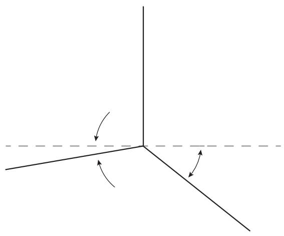
Isometrica (triangolo delle tracce equilatero)

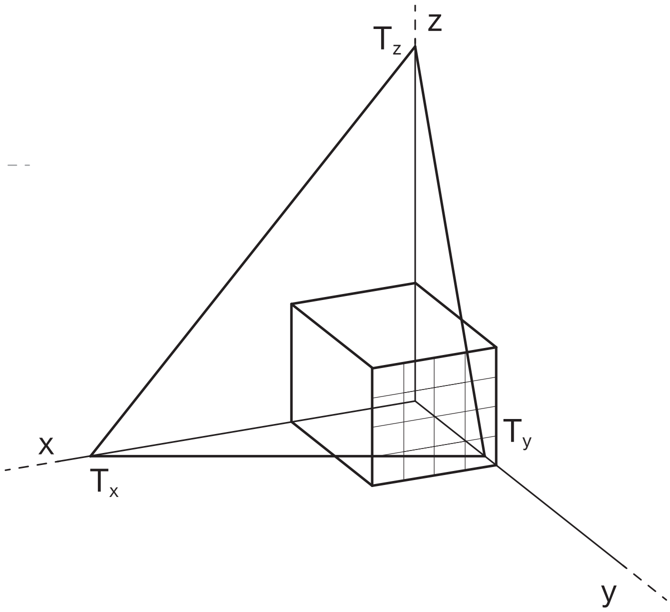
$u_x=u_y=u_z$



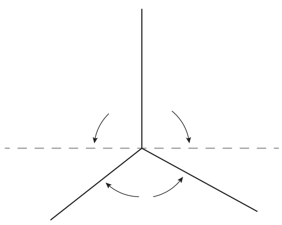


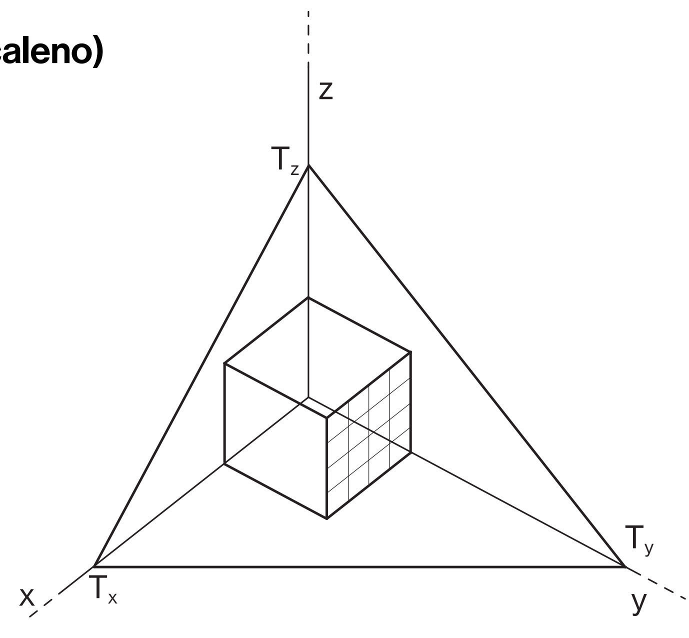
Dimetrica (triangolo delle tracce isoscele)





Trimetrica (triangolo delle tracce scaleno)





3.4 Unità assonometriche

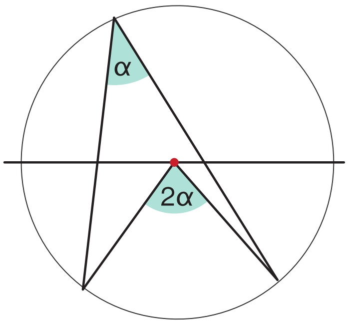
Le unità di misura assonometrica sui tre assi è sempre minore di quella reale (in scala). Il ritrovamento dei rapporti di riduzione, rispettivamente per via grafica o per via analitica. Esistono infatti tabelle precalcolate che indicano i rapporti assonometrici secondo l'orientamento degli assi e quindi degli angoli tra le loro proiezioni su **π**, mentre con il metodo grafico vengono determinati caso per caso.
Il metodo grafico, facilmente risolvibile senza calcoli, consta di due fasi successive:
a) Determinazione dell'intersezione del quadro con il triedro fondamentale tramite la determinazione del triangolo delle tracce
b) Ritrovamento del rapporto di riduzione con il ribaltamento degli assi sul quadro.

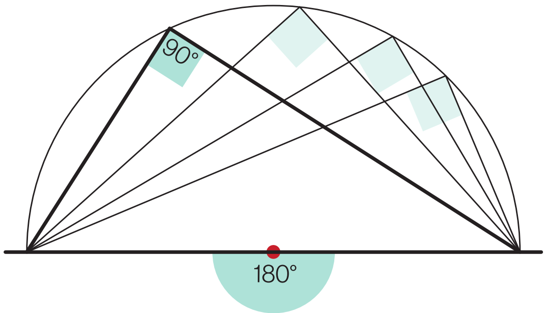
Intersezione del quadro con il triedro fondamentale

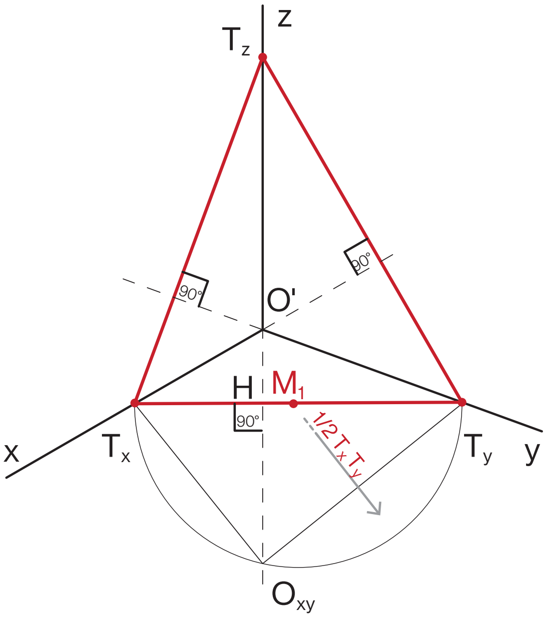
Come già affermato, in funzione della direzione che si sceglie per i tre assi e quindi della forma del triangolo delle tracce si può avere un'assomometria ortogonale monometrica (triangolo equilatero), dimetrica (triangolo isoscele) o trimetrica (triangolo scaleno).
Se l'assonometria è ortogonale si dimostra facilmente che l'origine degli assi coincide con l'ortocentro (punto di intersezione delle altezze) del triangolo delle tracce. Quindi per disegnare una qualsiasi assonometria ortogonale è sufficente scegliere un qualsiasi triangolo delle tracce, individuare l'ortocentro e quindi gli assi del triedro cartesiano o tracciare gli assi per poi individuare le tracce dei tre piani coordinati in modo che l'origine sia nell'ortocentro del triangolo delle tracce.
Per individuare l'ortocentro bisogna tracciare la retta uscente da uno spigolo e ortogonale al lato opposto ovvero l'altezza.

Ritrovamento dei rapporti di riduzione

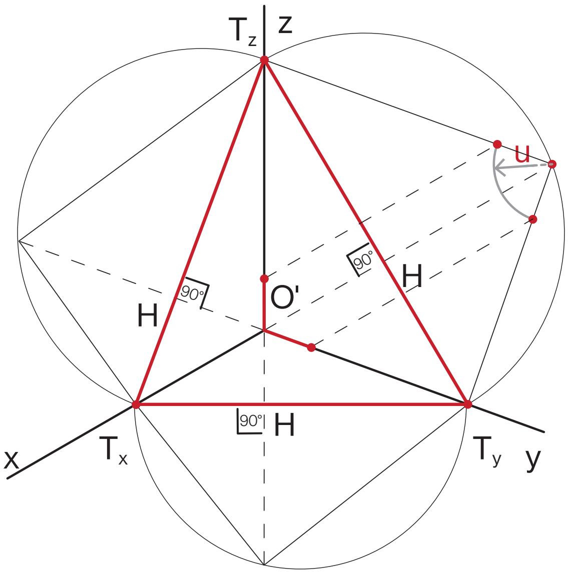
Secando il triedro, il quadro assonometrico riduce i tre piani cartesiani a tre triangoli rettangoli, retti in **O'** che nella proiezione risultano ottusangoli. I cateti di questi triangoli, appartengono agli assi **x,y,z** scorciati dalla proiezione, mentre le tre ipotenuse $T_x T_y$, $T_y T_z$, $T_z T_x$ appartengono al quadro assonometrico **π** e mantengono quindi la dimensione reale. Per trovare il rapporto di riduzione è sufficiente ribaltare sul quadro assonometrico i tre triangoli, in modo da ottenere le dimensioni reali dei cateti, utilizzando come asse di rotazione l'ipotenusa $T_x T_y$ per ribaltare il piano **xy** intorno all'ipotenusa. Si costruisce su di essa un triangolo rettangolo in O_{xy}, inscritto nella semicirconferenza avente come diametro $T_x T_y$. Sul ribaltamento dell'asse si traccia l'unità di misura scelta u, che permette di determinare l'unità assonometrica relativa riportando l'unità reale sull'asse stesso con una proiezione ortogonale all'ipotenusa del triangolo. Per determinare l'unità di misura nei tre assi, è necessario e sufficiente ribaltarla nel quadro **π**. Il ribaltamento è agevolato da alcune considerazioni geometriche. Si osserva infatti che i triangoli definiti dagli assi e dalla traccia del piano tra questi definito sono rettangoli, è rettangolo anche il triangolo definito nel piano proiettante ogni asse, le sue tracce con il quadro e il piano opposto. È quindi facile determinare i ribaltamenti tenendo presente che l'angolo al centro è la metà dell'angolo alla circonferenza, costruendo la semicirconferenza sulla traccia del piano da ribaltare. Nell'assonometria ortogonale è sufficiente conoscere la distsnza di **O** da **π** e due tracce per determinare la terza.

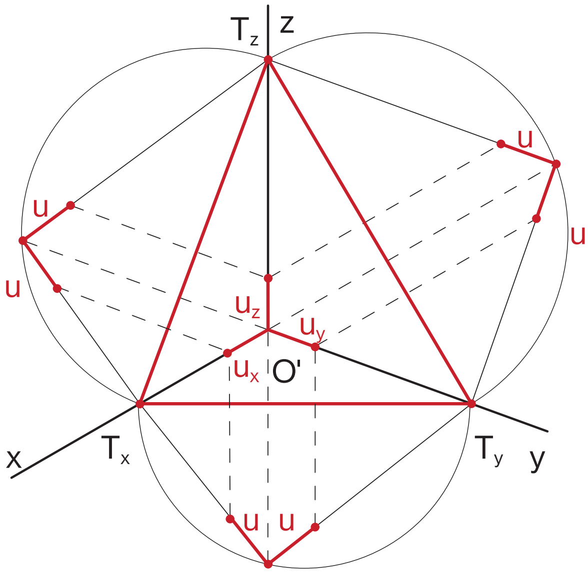

α
2α

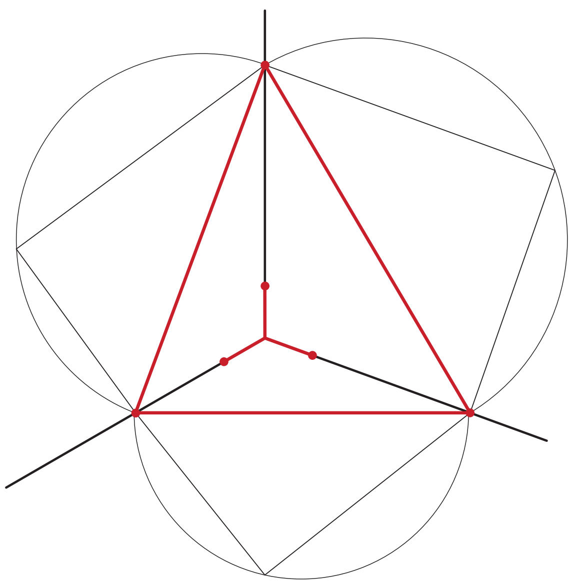

90°
180°


T z
z
90°
90°
O'
H
M 1
90°
1/2 T x T y
x
T x
T y
y
O xy

u


T z
z
u
90°
90°
H
O'
H
90°
H
x
T x
T y
y


T z
z
u
u
u
u
u z
u y
u x
O'
x
T x
T y
y
u
u



3.5 Assonometrie cavaliere

Nell'assonometria cavaliera la direzione di **C$^\infty$** è parallela a uno dei piani cartesiani, quindi il triangolo delle tracce è indeterminato, ma la disposizione della terna cartesiana di riferimento (e dello stesso oggetto) ha due assi paralleli al piano **π**, con il vantaggio di avere assonometrie che lasciano invariati alcuni piani dell'oggetto paralleli al quadro. Queste particolari assonometrie prendono il nome di assonometrie cavaliere, che sono molto usate nel disegno tecnico per la immediatezza della loro realizzazione, ma non consentono di effettuare operazioni di misura perchè il triangolo delle tracce resta indeterminato e pertanto non è possibile determinare il ribaltamento dell'asse obliquo.
Poichè nelle assonometrie cavaliere il quadro è sempre parallelo ad uno dei tre piani cartesiani, avremo che l'unità assonometrica è sempre la stessa sui due assi paralleli al quadro, mentre quella del terzo dipende dall'inclinazione della direzione di proiezione ed è determinta solo in alcuni casi.
In generale quindi le assonometrie cavaliere non sono mai trimetriche, e si possono avere due casi distinti, a seconda che la direzione di proiezione sia orizzontale o verticale.
Nel caso dell'assonometria cavaliera miltare la direzione di **C$^\infty$** è verticale, perciò i piani orizzontali non subiscono alcuna deformazione, né angolare né metrica e quindi l'immagine si presta in modo particolare alla rappresentazione dell'architettura e del territorio. Analogamente, è possibile disporre piani verticali dell'edificio parallelamente al quadro π, ottenendo una assonometria in cui la rappresentazione del piano verticale frontale coincide con il prospetto mongiano (assonometria cavaliera).

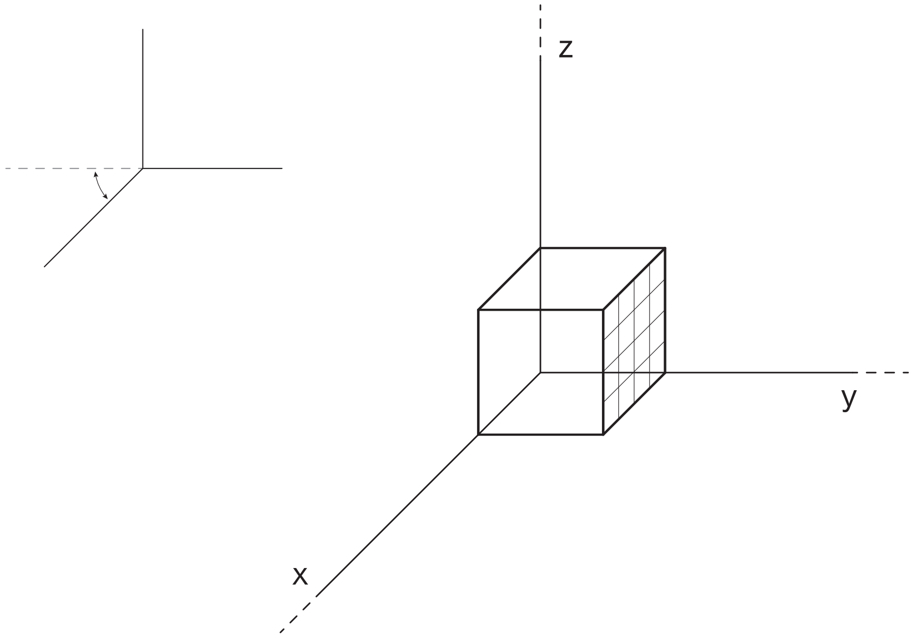
• l'**assonometria cavaliera** propriamente detta, quando il quadro è verticale, che in genere è dimetrica, con il rapporto di riduzione sul terzo asse determinabile solo in casi particolari; in particolare se la proiezione e il terzo asse sono inclinate a 45° rispetto al quadro, la terza unità assonometrica risulta dimezzata rispetto alle altre due;

• l'**assonometria militare o cavaliera militare**, è un'assonometria obliqua monometrica nella quale il quadro è orizzontale e il centro di proiezione verticale. Pertanto, si mantiene l'ortogonalità tra gli assi x-y , comunque inclinati rispetto all'asse z, sul quale si privilegia l'uso della stessa unità di misura dei due assi ortogonali, per cui in genere la militare è monometrica.

Il rapporto di riduzione sul terzo asse è noto (1/2u) solo quando l'asse è inclinato di 45° rispetto al quadro.
In tutti gli altri casi può essere scelto arbitrariamente sulla base del teorema di Pohlke.

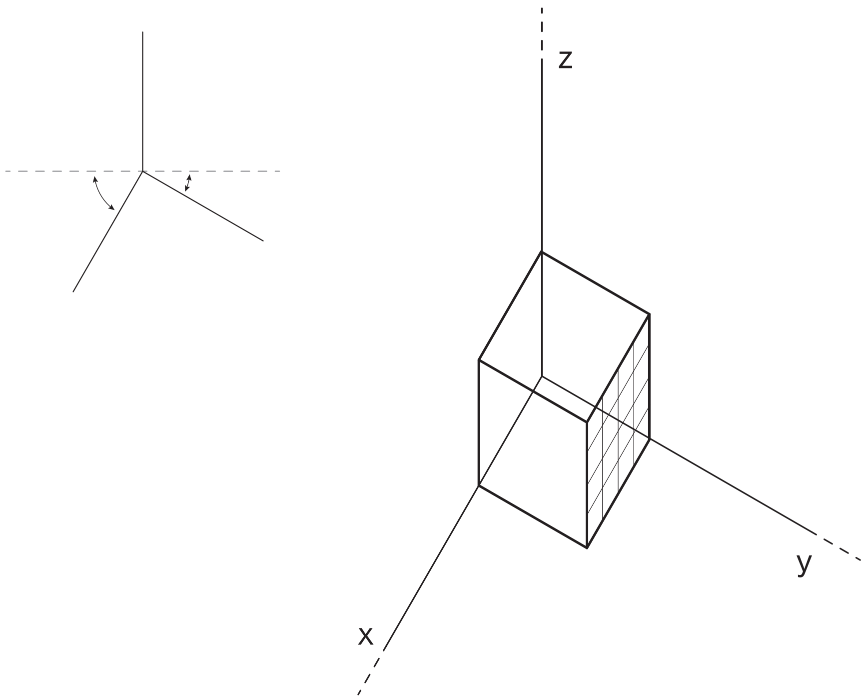
Cavaliera dimetrica

coefficienti di riduzione:
$u_y = u_z$
u_x= a piacere



Cavaliera Militare (monometrica)

coefficienti di riduzione:
$u_x = u_y = u_z$



3.6 Il Teorema di Pohlke

Prendendo spunto dal dubbio circa la legittimità del fenomeno della proiezione parallela di tre assi ortogonali, a metà Ottocento il matematico polacco K. Pohlke elaborò un teorema di fondamentale importanza per l'applicazione delle proiezioni assonometriche alla rappresentazione tecnica. Ritenendo giustificabili anche a livello geometrico quelle proiezioni che avevano una evidenza empirica, si propose di trovare le condizioni in cui assegnata una terna di segmenti uguali ed ortogonali $\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z$, questa poteva dar luogo, in seguito a una proiezione obliqua, a tre segmenti $\mathbf{u'}_x, \mathbf{u'}_y, \mathbf{u'}_z$, arbitrariamente assegnati sul piano di proiezione **π**.
“Scelti sul quadro **π** tre segmenti $\mathbf{u'}_x, \mathbf{u'}_y, \mathbf{u'}_z$ uscenti da uno stesso punto **O’** aventi lunghezze e direzioni arbitrarie, esiste sempre un centro improprio di proiezione, individuato dalla direzione del centro **C** improprio tale che essi possono essere considerati la proiezione su **π**, dalla direzione del centro **C** improprio, di tre segmenti di uguale lunghezza u, a due a due perpendicolari tra loro”. Ciò comporta che comunque siano orientati i tre segmenti unitari $\mathbf{u'}_x, \mathbf{u'}_y, \mathbf{u'}_z$ possono essere la corretta rappresentazione degli spigoli di un cubo da una direzione obliqua rispetto al quadro, purchè si rinunci alla determinazione degli elementi proiettivi per la soluzione di altri problemi di misura, per i quali occorre sempre conoscere la direzione del centro e il triangolo delle tracce, che nell'assonometria cavaliera sono indeterminati.
Per molto tempo il teorema rimase un enunciato senza dimostrazione proiettiva, raggiunta solo nel secolo scorso.

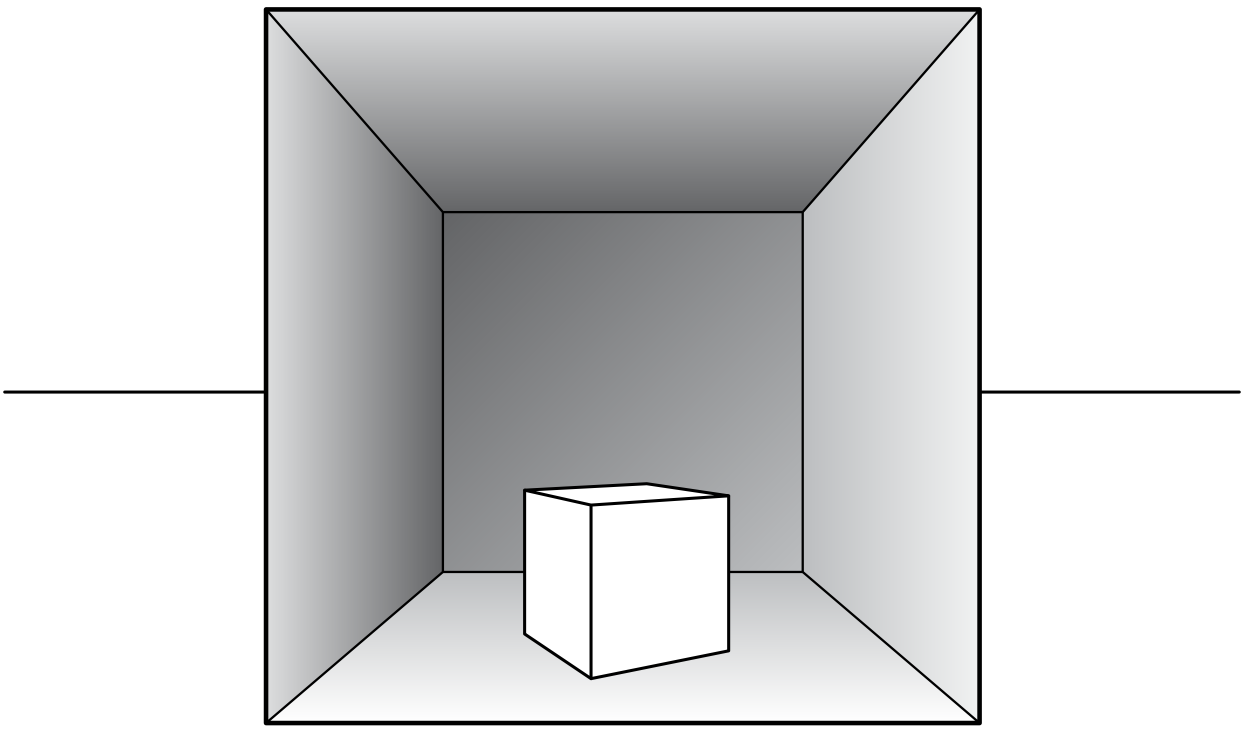
4. Prospettiva

4.1 Introduzione

La prospettiva lineare è una costruzione grafica basata su una regola geometrica rigorosa che permette di misurare la rappresentazione dello spazio, la cui scoperta ha segnato l'inizio del Rinascimento.
Sviluppata dalle ricerche empiriche dai pittori toscani del XIV secolo, è stata dimostrata in modo empirico da Filippo Brunelleschi nel 1413 con due famose tavolette che riproducevano il battistero di San Giovanni e Palazzo Vecchio a Firenze, rispettivamente con vista frontale e d'angolo.
Tra tutti i metodi di rappresentazione proiettiva, la prospettiva è stata la prima ad essere codificata formalmente nei trattati quattrocenteschi di Piero della Francesca e Leon Battista Alberti.
I pittori rinascimentali non conoscevano la geometria proiettiva e non avevano il concetto di punto improprio che spiega il significato della fuga comune delle parallele; essi usavano procedimenti basati sul "metodo del taglio" descritto da Piero (intersezione dei raggi visivi con la finestra prospettica, su cui si basano gli strumenti prospettici (Dürer) o la costruzione abbreviata proposta dall'Alberti, che anticipa il metodo dei punti misuratori.
La prospettiva semplifica il processo della visione mono oculare, sostituendo la proiezione sulla superficie della retina con quella sulla superficie piana del foglio, da cui il termine prospettiva lineare.
Infatti, per la fisiologia dell'occhio, l'immagine visiva si forma su una superficie assimilabile ad una sfera, mentre nella prospettiva il quadro è piano. Pertanto, la costruzione geometrica risulta molto più vicina a quella della fotografia che non alla vista, alla quale avevano inutilmente cercato di avvicinarsi gli antichi, sviluppando una superficie cilindrica per limitare le aberrazioni laterali sottolineate da Leonardo (E. Panowsky).

Il termine prospettiva deriva dal latino *perspicere*, vedere chiaramente o più probabilmente da prospicere, guardare avanti, attraverso la 'finestra' posta tra l'occhio e l'oggetto, assimilata al quadro pittorico, che interseca i raggi visivi che congiungono l'occhio dell'osservatore ai punti notevoli dell'oggetto rappresentato.
La posizione degli oggetti della scena e delle variabili prospettiche viene descritta in proiezioni ortogonali e per questo la prospettiva viene definita anche prospettiva applicata.

Dal punto di vista proiettivo, l'immagine prospettica è una proiezione centrale assimilata alla visione umana, nella quale il sistema proiettivo è riferito ad un piano orizzontale π', detto piano geometrale, rispetto al quale si definisce la direzione del quadro di proiezione p e la posizione del centro **V**, considerato coincidente con l'occhio dell'osservatore.
La proiezione rende possibile la rappresentazione rigorosa (matematica) di tutti i punti dello spazio (propri e impropri) con una corrispondenza biunivoca tra la realtà e la sua immagine, che permette il passaggio inverso, dall'immagine alla determinazione della posizione esatta dei suoi elementi (fotogrammetria semplice). Su questo presupposto si basano gli strumenti ottici di rilevamento a distanza.



4.2 Variabili della prospettiva

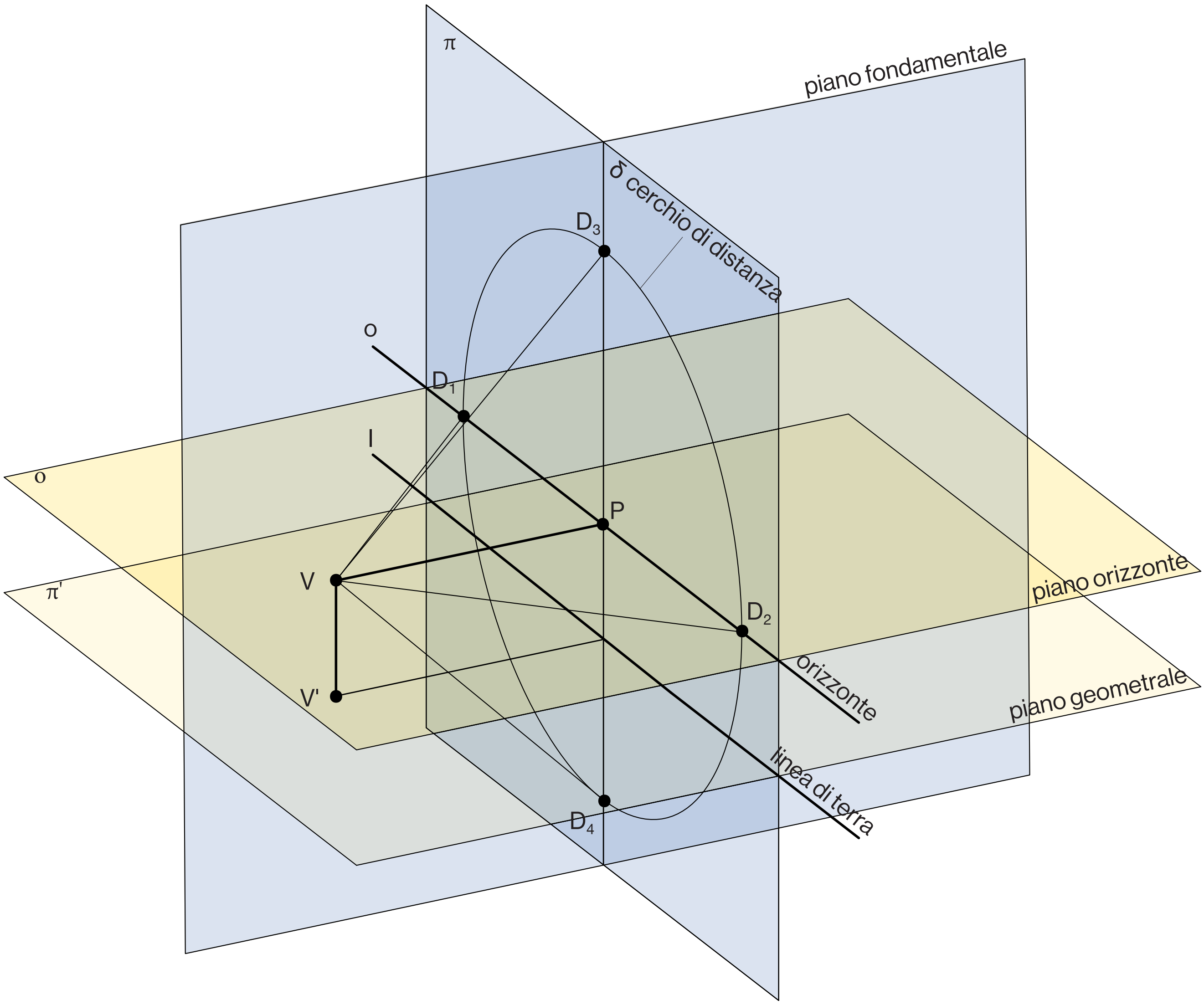
L'immagine prospettica è definita dalla posizione del centro **V** rispetto al *quadro* π e dalla direzione dello sguardo, espressa dal *raggio principale* sempre ortogonale al quadro π, interposto tra la scena e l'osservatore, che determina la sua giacitura nello spazio (angolo rispetto al piano di riferimento orizzontale π**'**).
A queste due *variabili fondamentali*, definite rispetto al piano orizzontale di riferimento π**'** detto *piano geometrale*, si rifescono tutti gli altri elementi geometrici che facilitano la costruzione dell'immagine prospettica della scena mantenendo una corrispondenza biunivoca tra la scena reale e la sua rappresentazione. Assunto il *piano geometrale* π**'** orizzontale come riferimento, rispetto ad esso si definisce in proiezione ortogonale la posizione di tutti gli elementi della prospettiva partendo dalle variabili indipendenti e continuando con gli elementi di riferimento derivati, e infine gli elementi da rappresentare nel disegno.

Variabili indipendenti

- *punto di vista* **V**: è il centro di proiezione e indica il punto dal quale si guarda l'oggetto, ossia l'occhio dell'osservatore, è definito dalla sua posizione e dalla *direzione dello sguardo*, ossia la direzione dell'*asse ottico* (*direzione principale*).

- *quadro* π: la sua posizione è definita dalla distanza principale tra **V** e π (= segmento **VP** perpendicolare a π e dalla giacitura di π nello spazio (angolo rispetto al piano di riferimento riferimento orizzontale π**'**, assimilato al piano di calpestio e detto anche piano geometrale.
Il quadro π è il piano sul quale avviene la proiezione/disegno ed è sempre interposto tra l'osservatore e l'oggetto, come se fosse una lastra di vetro tra i due, e può essere verticale (*prospettiva a piano verticale*) o inclinato (*prospettiva razionale*).

Fissata la posizione di **V** rispetto alla scena, che determina l'angolo entro il quale si vede un oggetto rispetto all'asse ottico e quindi la sua eventuale distorsione, l'aumento o la diminuzione della distanza del quadro dall'oggetto non cambia la prospettiva, ma solo la dimensione dell'immagine. Risultano definiti tutti gli altri elementi di riferimento della prospettiva.
Le proiezioni ortogonali possono essere disegnate a parte, come disegno preparatorio, o direttamente win prospettiva, ribaltando il punto di vista **V** e il geometrale π_1 sul quadro.


π
piano fondamentale
δ cerchio di distanza
D_3
o
D_1
I
o
P
π'
V
D_2
piano orizzonte
V'
orizzonte
piano geometrale
linea di terra
D_4

4. Prospettiva

Elementi di riferimento (dipendenti dalle variabili):

- *piano dell'orizzonte* ο: piano orizzontale passante per **V**, situato all'altezza dell'occhio dell'osservatore;

- *orizzonte* **o**: retta di intersezione tra il piano dell'orizzonte e il quadro, fuga dei piani orizzontali;

- *piano fondamentale*: piano verticale perpendicolare al quadro passante per **V**;

- *punto principale* **P**: punto in cui il *raggio principale* (asse ottico) **VP** interseca il quadro π, fuga delle rette di profondità (rette perpendicolati al quadro π);

- *cerchio di distanza* δ: circonferenza su π di centro **P** e raggio **VP**, luogo delle fughe delle rette inclinate a 45° rispetto a π e indivividua i 4 *punti di distanza* **D_1**, **D_2**, sull'orizzonte e **D_3**, **D_4** sulla verticale principale per **V** (rispettivamente fuga delle rette orizzonali e verticali);

- *cerchio visivo* ρ: circonferenza di intersezione del cono visivo con π di centro **P** e raggio **VP** all'interno del quale l'immagine non subisce deformazioni aberranti (apertura di circa 30° rispetto all'asse ottico); il *cono di visione* entro il quale si vede l'oggetto deve quindi essrvi compreso;

- *linea di terra* **l** oppure **lt**: traccia del *piano geometrale*, è la retta di intersezione tra il π' e il *quadro* π, intorno alla quale si può ribaltare il piano stesso;

- *punto di stazione* **V'**: proiezione verticale di **V** su π', rappresenta il punto in cui si trova l'osservatore.

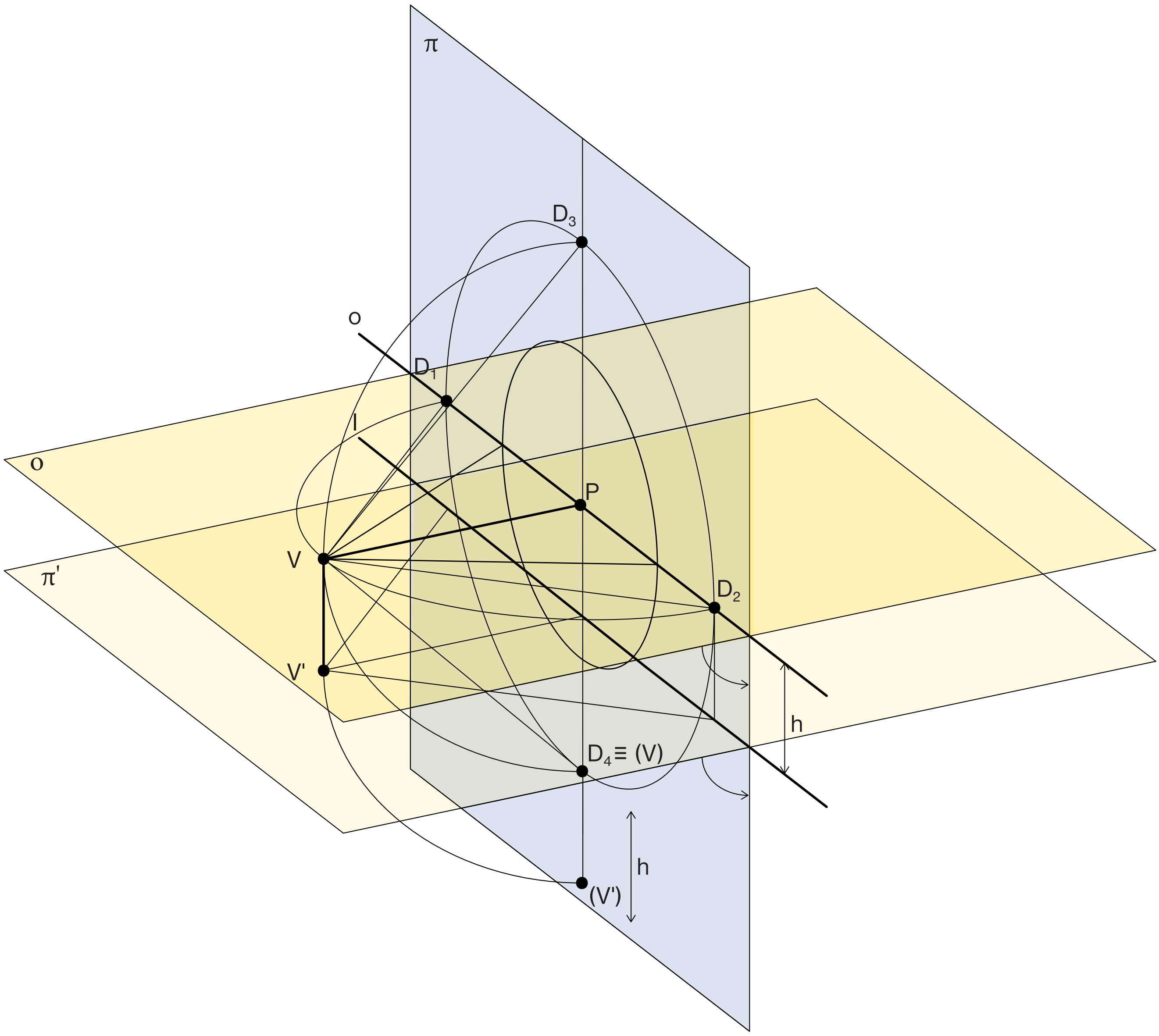
- *altezza* **h**: distanza tra la *linea di terra* e l'*orizzonte*, ovvero tra **V** e **V'**, esprime l'altezza dell'occhio dell'osservatore.

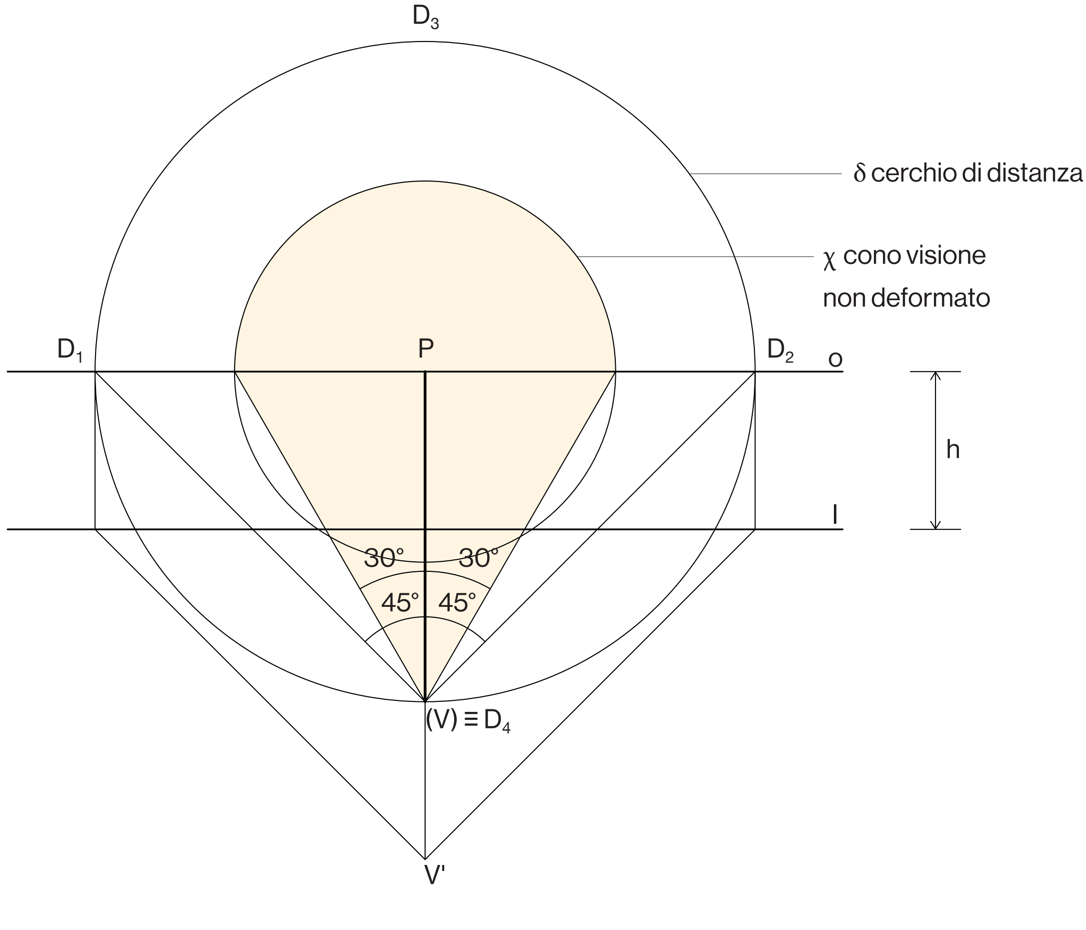
- *fuga* **Fr**: punto improprio di tutte le rette parallele a una data retta, è l'intersezione con il quadro della parallela alla retta **r** passante per **V**; tutte le rette parallele al quadro hanno fuga impropria.

- *traccia* **Tr**: punto di intersezione tra la retta r e il quadro, è il *punto unito* nel quale l'immagine proiettata (prospettiva) coincide con il punto reale.

Congiungendo la traccia e la fuga di una retta sii traccia la sua prospettiva; l'intersezione di due rette determina la posizione di un punto. In questo modo, ripetendo la stessa operazione è possibile disegnare qualsiasi cosa.

Per analogia con le rette, i piani hanno la traccia sulla intersezione con il quadro, mentre la fuga si trova sull'intersezione del piano parallelo condotto per **V**.
Per appartenenza la fuga e la traccia di una retta appartenente ad un piano appartengono rispettivamente alla fuga e alla traccia del piano (e viceversa).


π
D3
o
D1
I
o
P
V
π'
D2
V'
h
D4 ≡ (V)
h
(V')


D3
δ cerchio di distanza
χ cono visione
non deformato
D1
P
D2
o
h
I
30°
30°
45°
45°
(V) ≡ D4
V'

4. Prospettiva

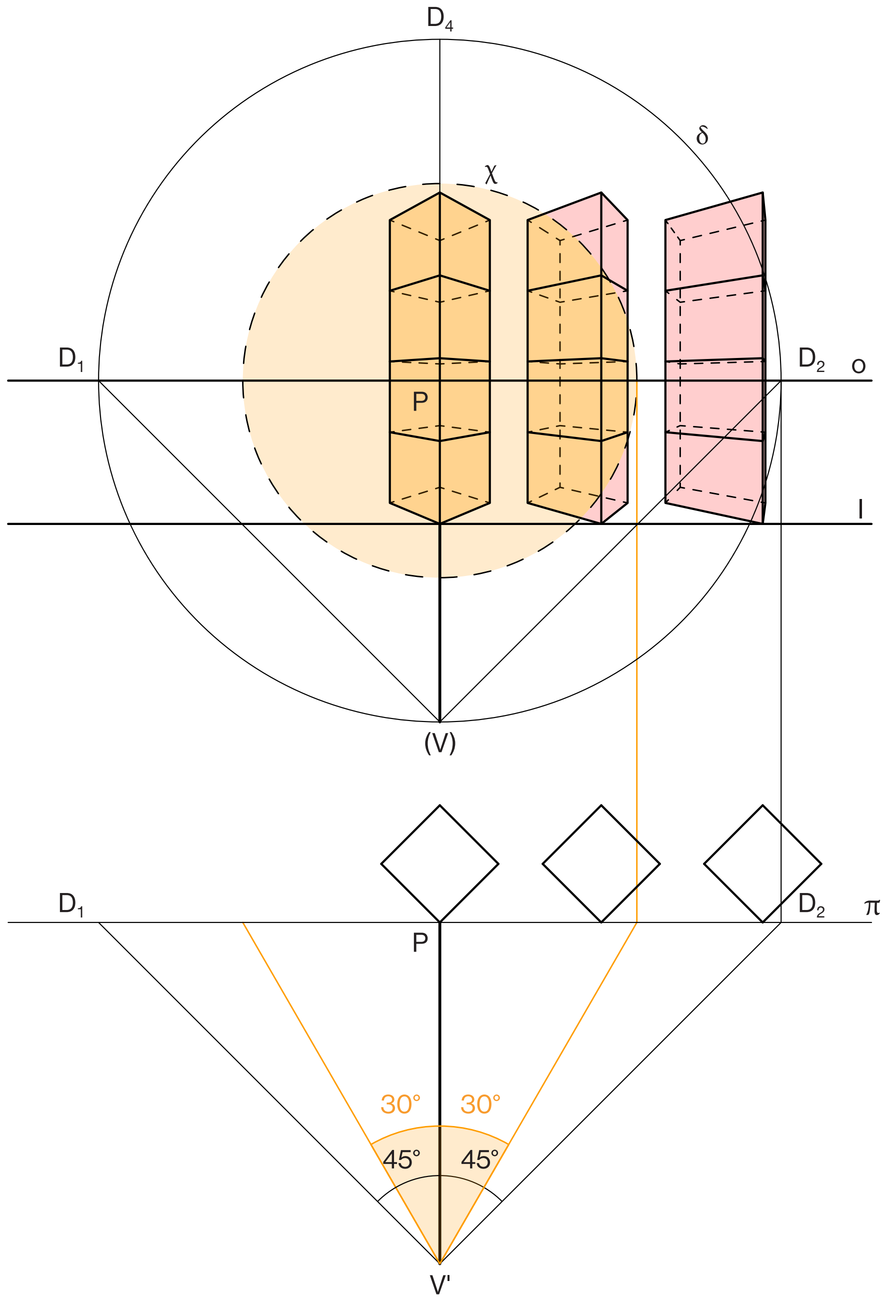
Poichè per disegnare una retta basta unire due suoi punti, la *traccia* e la *fuga* sono sufficienti a tracciare la prospettiva di una qualsiasi retta, ma rette e piani particolari risultano definite velocemente perchè hanno la fuga determinata dagli elementi sopra elencati, in particolare:
- le rette di profondità, parallele all'asse ottico hanno fuga in **P**,
- le rette orizzontali hanno la fuga sull'orizzonte,
- le rette orizzontali inclinate a 45° rispetto al quadro hanno fuga nei punti di distanza $\mathbf{D_1}$, $\mathbf{D_2}$,
- le rette inclinate a 45° rispetto al geometrale hanno la fuga nei punti di distanza $\mathbf{D_3}$, $\mathbf{D_4}$,
- le rette orizzontali inclinate a 45° rispetto al quadro hanno la fuga sul cerchio di distanza,
- se il quadro è verticale, tutte le rette verticali restano verticali anche in prospettiva e le rette parallele alla linea di terra restano orizzontali. Se il quadro è inclinato, anche le rette verticali avranno fuga propria.

L'orientamento del quadro rispetto ai tre assi ortogonali di riferimento dello spazio determina situazioni riconoscibili come:
- *prospettiva centrale*, spazio orientato frontalmente, una fuga principale in **P** per le rette orizzontali ortogonali al quadro
- *prospettiva accidentale*, due fughe principali per le orizzontali ortogonali di riferimento, ai due lati di **P**, a distanza fissa a seconda dell'inclinazione
- *prospettiva razionale* (a quadro inclinato), tre fughe distinte per le tre direzioni di riferimento principali.

Come nella fotografia, la cosa più importante per una prospettiva è la posizione, altezza e direzione del punto di vista **V** e l'angolo rispetto al piano orizzontale della direzione dell'asse visivo rispetto alla scena (spazio e oggetti) da rappresentare.
Se l'asse (= *raggio principale*) è orizzontale il quadro, che è sempre perpendicolare ad esso, sarà verticale e avremo una prospettiva a piano verticale.
Se si vuole ottenere un'immagine prospettica priva di aberrazioni, occorre che il *cono di visione* che individua il contorno della scena sia compreso all'interno del *cono ottico* di 60° complessivi all'interno del quale le deformazioni rispetto alla immagine retinica sono ininfluenti.
In genere si cerca di mantenere il cono di visione intorno ai 45-50° in modo da avere un po' di margine.

È importante ricordare che la verifica deve essere fatta anche rispetto alle altezze e non solo in pianta, in modo da evitare deformazioni degli angoli esterni in alto e in basso.

L'altezza del punto di vista sul geometrale corrisponde alla distanza tra la linea di terra e l'orizzonte e deve corrispondere ad un punto di stazione compatibile con lo stato di stazione di un ipotetico osservatore posto all'interno o al cospetto della scena. In genere si considera che l'altezza dell'occhio di un osservatore in posizione eretta sia di circa 1,70 m.
Se un oggetto è molto più in alto o in basso occorrerà allontanare il punto di vista per mantenere il quadro verticale, oppure inclinare l'asse/quadro verso l'alto o verso il basso con una prospettiva a piano inclinato (tre fughe per una terna di rette parallele agli assi cartesiani.


D4
δ
χ
D1
D2
o
P
l
(V)
D1
D2
π
P
30°
30°
45°
45°
V'

4.3 Rappresentazione degli enti fondamentali

Punto nello spazio:

Un punto **P** è univocamente rappresentato mediante l'immagine **P'** e l'immagine di una retta passante per **P**.

Due rette incidenti si incontrano in un punto comune, appartenente ad entrambe, pertanto due rette complanari individuano un punto nello spazio, la cui prospettiva si trova nel punto comune alla prospettiva delle due rette.

Retta generica:

Una retta **r** è univocamente rappresenta mediante l'immagine **r'** passante per due punti caratteristici della retta: la *traccia* **Tr** e la *fuga* **Fr'**, rispettivamente intersezione della retta con il quadro ed immagine del punto improprio della retta e quindi immagine della direzione della retta.

Tutte le rette parallele hanno in comune il punto improprio, quindi le loro prospettive hanno la stessa fuga, ma tracce distinte.

Tutte le rette orizzontali al quadro hanno la fuga sull'orizzonte (fuga dei piani orizzontali).

Tutte le rette perpendicolari al quadro hanno la fuga nel punto principale.

Piano generico:

Un piano α si rappresenta mediante due rette, la ***traccia*** **tα**, intersezione del piano con il quadro, e la *fuga* **fα'**, proiezione della retta impropria del piano che ne definisce la giacitura.

Due piani incidenti hanno una retta comune, appartenente ad entrambe, pertanto due piani individuano una retta dello spazio, che ha la fuga coincidente con il punto di intersezione delle fughe dei due piani e la traccia nel punto di intersezione delle due tracce.

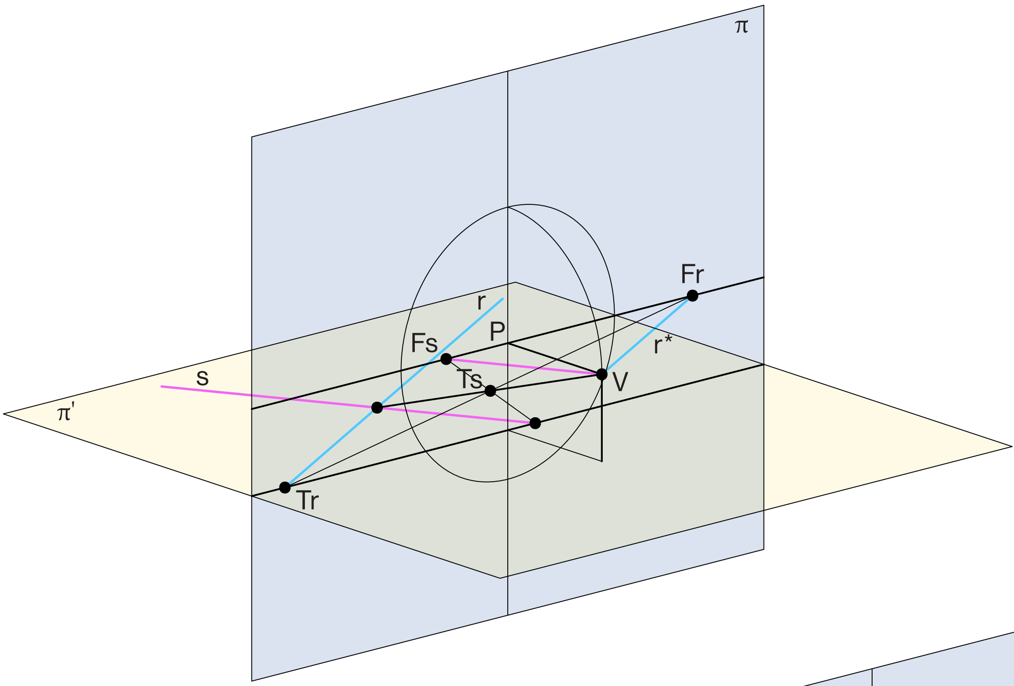
Due piani paralleli hanno in comune la retta impropria, quindi le loro prospettive hanno la stessa fuga. La fuga e la traccia di uno stesso piano sono sempre parallele.

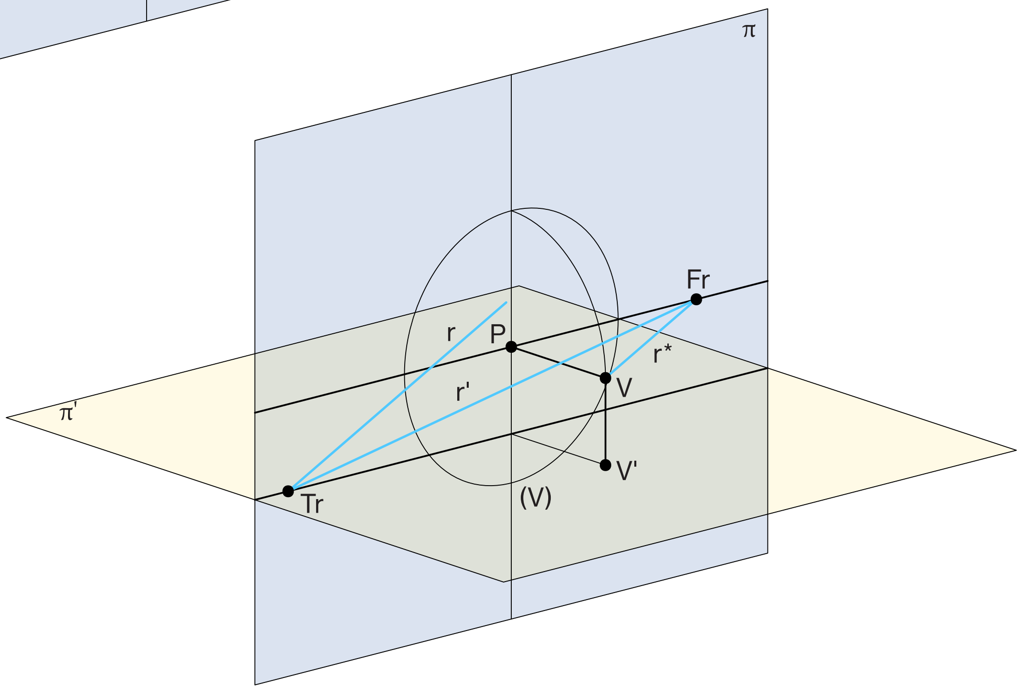
Piani paralleli hanno la stessa fuga, ma tracce distinte e parallele.

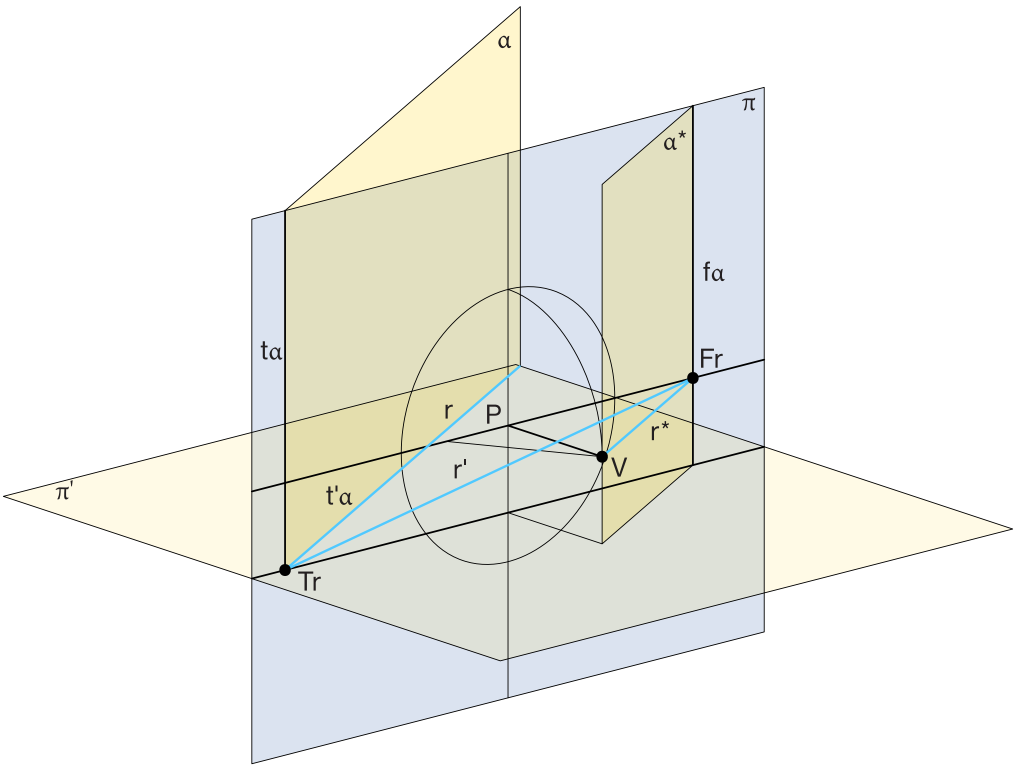
L'orizzonte è la fuga dei piani orizzontali.

La traccia e la fuga di piani perpendicolari al quadro sono rette di massima pendenza de piano.

I piani verticali e genericamente inclinati intersecano il geometrale con una retta che ha la traccia coincidente all'intersezione della traccia del piano con la linea di terra, e la fuga all'intersezione della fuga del piano con la linea di orizzonte.


π
Fr
r
Fs
P
r*
s
Ts
V
π'
Tr


π
Fr
r
P
r*
r'
V
π'
V'
Tr
(V)


α
π
α*
fα
tα
Fr
r
P
r*
r'
V
π'
t'α
Tr

4.4 Procedimenti di costruzione della prospettiva

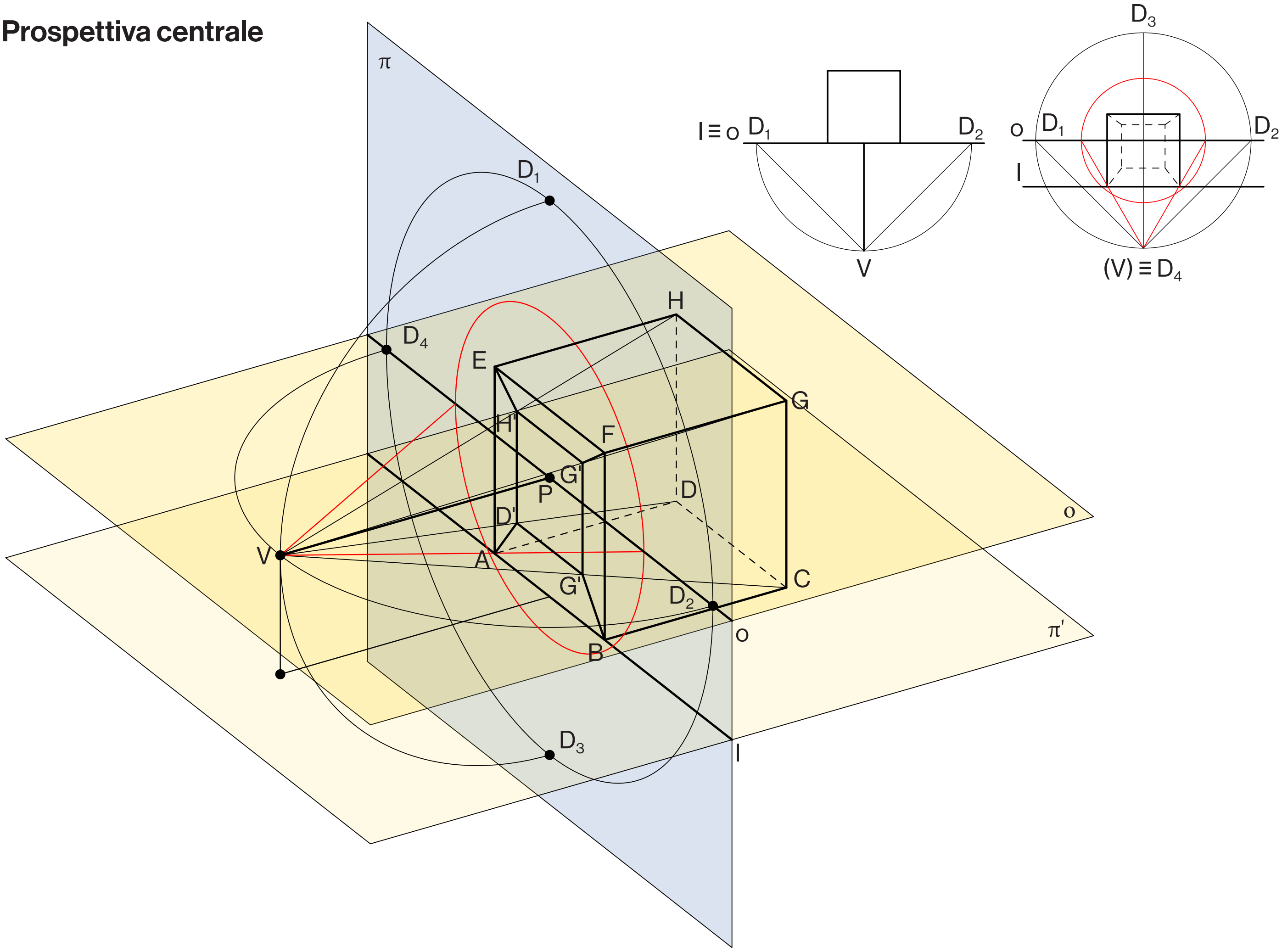
La prospettiva può essere ricavata con diversi procedimenti (metodo delle fughe, punti misuratori, ribaltamento del piano geometrale), tutti sviluppati a partire dal metodo del taglio descritto dall'Alberti e da Piero.
I procedimenti in uso applicano diversi accorgimenti per velocizzare e contenere la costruzione geometrica con tracce e fughe, privilegiando le coppie di rette perpendicolari.
In ogni caso è fondamentale la rappresentazione preliminare degli elementi di riferimento (p. 49), che permettono di disegnare direttamente sul quadro e sono utili per tracciare immediatamente rette e piani particolari.

Prospettiva a piano (quadro) verticale

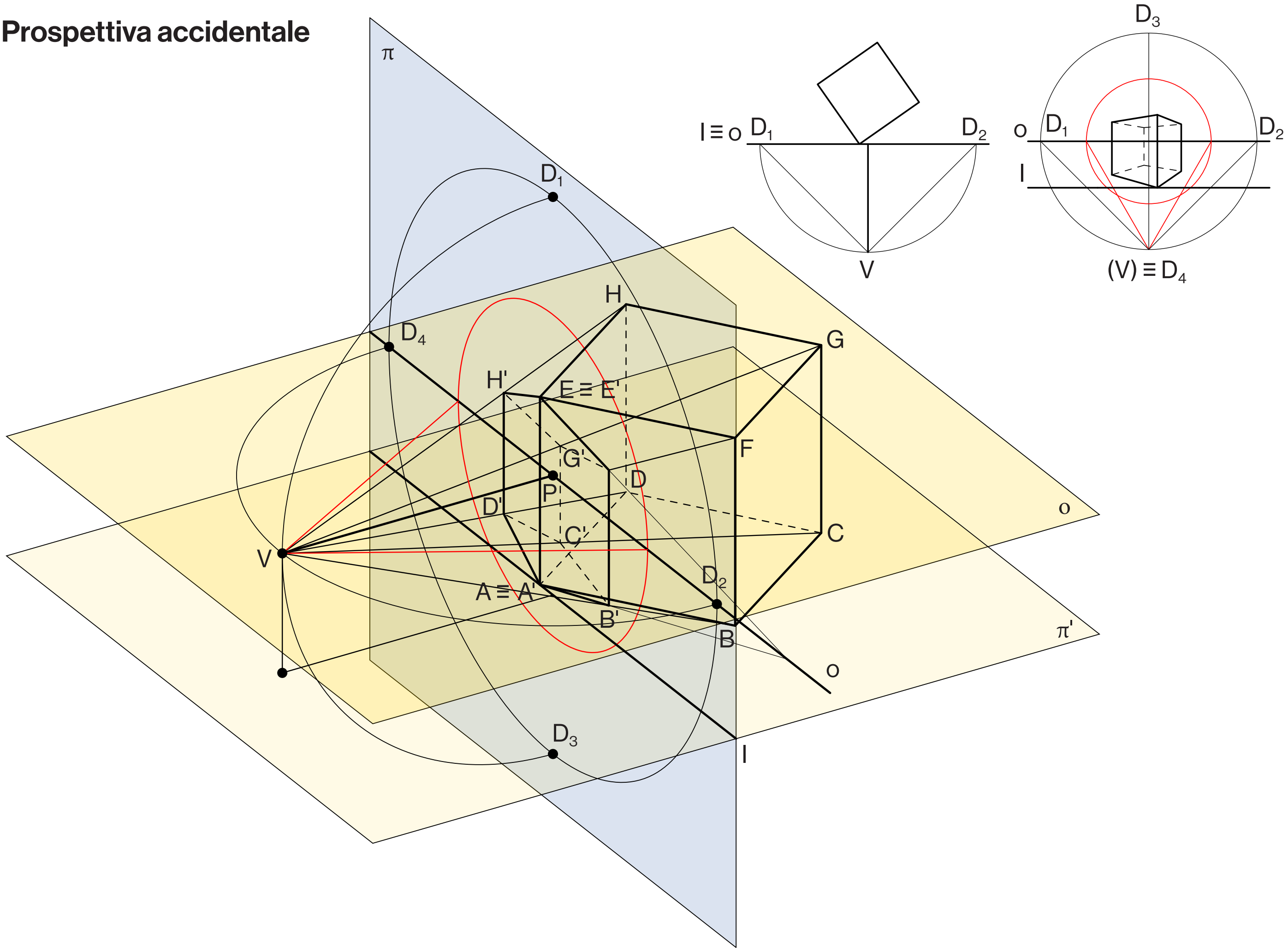
La *prospettiva a piano* (o *quadro*) *verticale* è la più usata. Essa ricostruisce la visione di un osservatore in posizione eretta che guarda senza inclinare lo sguardo.
A seconda dell'orientamento degli elementi principali dello spazio rappresentato, dove in genere dominano superfici ortogonali tra loro, avremo due casi distinti:
- *prospettiva centrale*, quando le due direzioni principali ortogonali sono parallele e perpendicolari al quadro;
- *prospettiva accidentale* o *d'angolo*, quando le due direzioni principali sono generiche.

Se il quadro è verticale, tutte le rette verticali restano parallele e sono verticali anche in prospettiva, quindi considerando le tre direzioni cartesiane ortogonali tra loro, quelle orizzontali avranno fughe proprie sulla retta dell'orizzonte, mentre le rette verticali avranno fuga impropria e pertanto in prospettiva sono perpendicolari alla **I**.
Tutte le rette perpendicolari al quadro (rette di profondità) hanno la fuga in **P**, mentre le rette parallele al quadro, mantengono il parallelismo avendo fuga impropria.
Se si considera una copia di rette ortogonali orizzontali, la loro fuga si trova sull'orizzonte tracciando le rispettive parallele da **V'** in **PO**, o direttamente da **(V)** sul cerchio di distanza.
Se immaginiamo di ruotare la coppia di ortogonali, le due fughe che sono vincolate dall'agolo tra le rette, ruotano insieme. Quando una delle due rette diventa ortogonale al quadro la sua fuga coincide con **P**, mentre l'altra retta è parallela al quadro e ha fuga impropria.

Prospettiva centrale

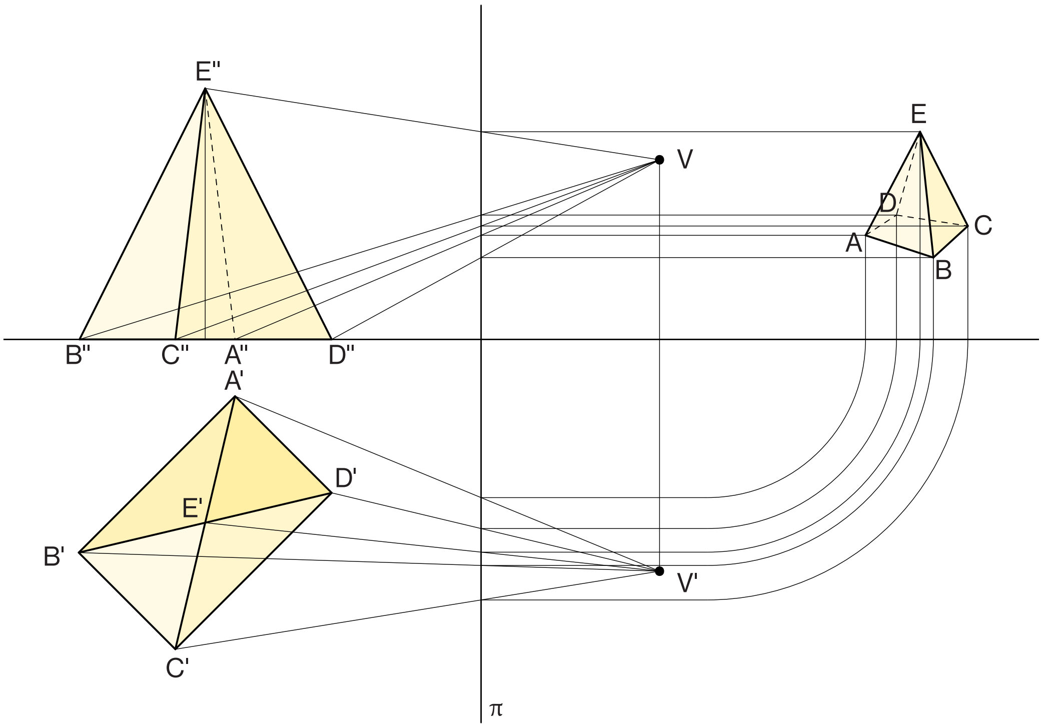


Prospettiva accidentale



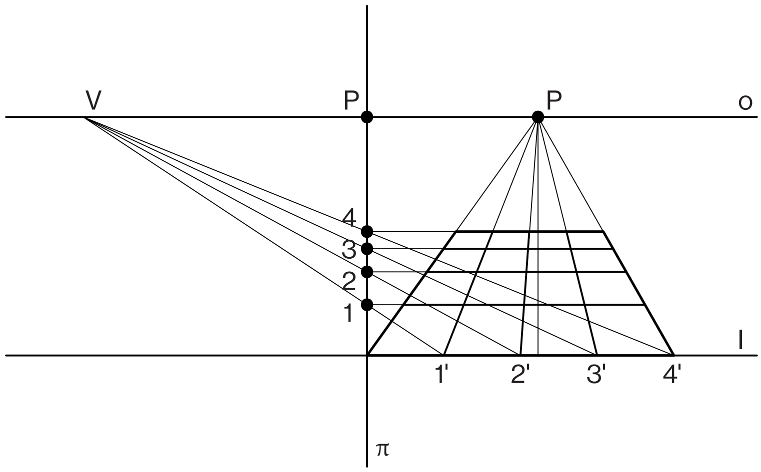
4.1
4.2
4.3
4.4

4. Prospettiva



Metodo del taglio (Piero della Francesca)

Il *metodo del taglio* si basa sulla determinazione idelle intersezioni con il quadro dei raggi visivi che proiettano i vertici dell'oggetto da rappresentare in prospettiva ed è quello usato da Piero della Francesca nel suo trattato. L'immagine prospettica si ricava misurando la posizione dei punti di intersezione in pianta e alzato con le proiezioni ortogonali.
Su questo metodo si basano gli strumenti prospettici (prospettografi) del Rinascimento, usati per mettere in prospettiva forme complesse, come lo sportello prospettico del Durer. Questo aveva un telaio con uno sportello chiudibile e due fili mobili ortogonali. La 'finestra' materializzava il quadro ed era collegata ad un mirino che fissava il punto di vista, al quale era attaccato un filo. Ponendo la figura da rappresentare oltre la finestra prospettica, che aveva uno sportello di chiusura, si poteva materializzare il raggio visivo tendendo il filo tra il mirino e i punti cospicui dell'oggetto da rappresentare, mentre un assistente spostava i due fili del telaio della finestra prospettica per fissare la posizione dell'intersezione con il quadro. Questa veniva poi segnata sullo sportello richiuso.



Costruzuione abbreviata (Leon Battista Alberti)

La *costruzione abbreviata* viene descritta da Leon Battista Alberti nel *De Pictura* come metodo semplificato che permette di misurare direttamente la profondità sulle rette di profondità ed è considerato un'anticipazione del ribaltamento di **V** nei punti di distanza.
Il metodo albertiano determina la profondità con il ribaltamento del punto di vista sulla superficie del quadro per determinare la quota dell'intersezione con il quadro delle parallele in profondità e riportando la quota della proiezione ortogonale per il disegno dei pavimenti a dama in prospettiva centrale,

4. Prospettiva

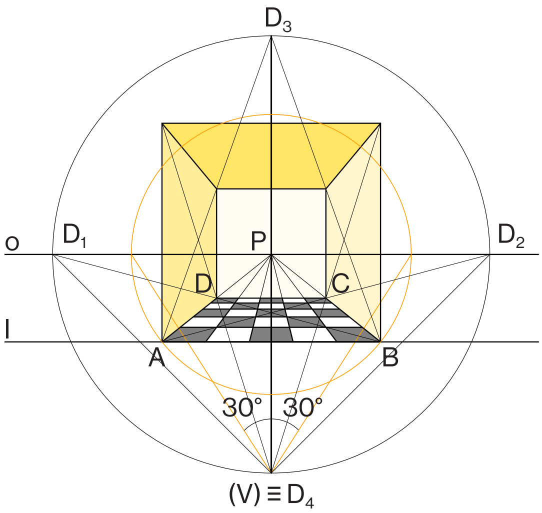
Prospettiva centrale

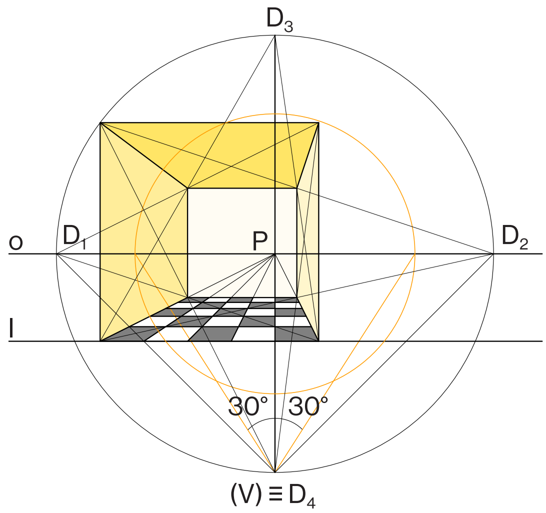
La prospettiva centrale indica una situazione nella quale le direzioni ortogonali prevalenti sono rispettivamente parallele o ortogonali al quadro, con lo spazio o l'ggetto disposto frontalmente all'osservatore, con lo sguardo fisso su **P**.
Essa viene spesso usata per rappresentare ambienti interni poiché permette di visualizzare 5 superfici della scatola spaziale contemporaneamente. Inoltre tenendo conto degli elementi definiti dalle variabili prospettiche è molto veloce la determinazione della prospettiva del reticolo cubico che misura lo spazio cartesiano.
Infatti avremo:

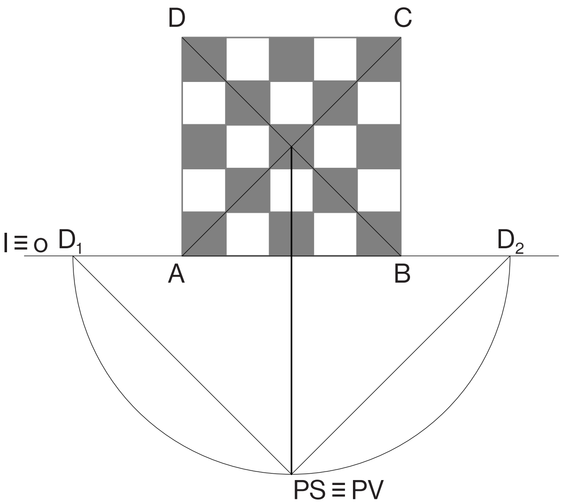
- il quadro π parallelo (in genere lo si fa coincidere) a una faccia dell'oggetto;
- Tutte le rette perpendicolari al quadro (rette di profondità) hanno un unico punto di fuga che coincide con il punto principale **P**;
- le rette inclinate a 45°, ovvero le diagonali sulle facce del reticolo cubico hanno le fughe nei punti di distanza situati sull'orizzonte (rette rizzontali) o sulla retta principale (rette appartenenti ai piani di profondità verticali.

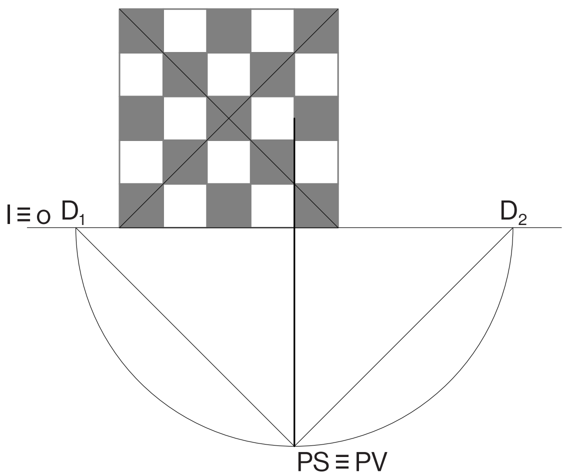
Una volta tracciati il cerchio di distanza che visualizza la distanza di **V** dal quadro, l'orizzonte e la retta verticale incidenti in **P**, punto principale, sono fissati i 4 punti di distanza e risulta immediata la misurazione della profondità in conseguenza della prospettiva di un cubo appoggiato al geometrale e al quadro:
- tracciata la faccia sul quadro, si conducono dai vertici le quattro rette di profondità congiungendoli a **P**,
- si determina la lunghezza dello spigolo in profondità tracciando le diagonali del quadrato, che hanno le fughe sui due punti di distanza opposti rispetto a **P**,
- successivamente è possibile disegnare una serie di quadrati minori riportando la misura sulla **I**, tracciando le rette di profondità e infine trovando sull'intersezione con le diagonali le misure in profondità.

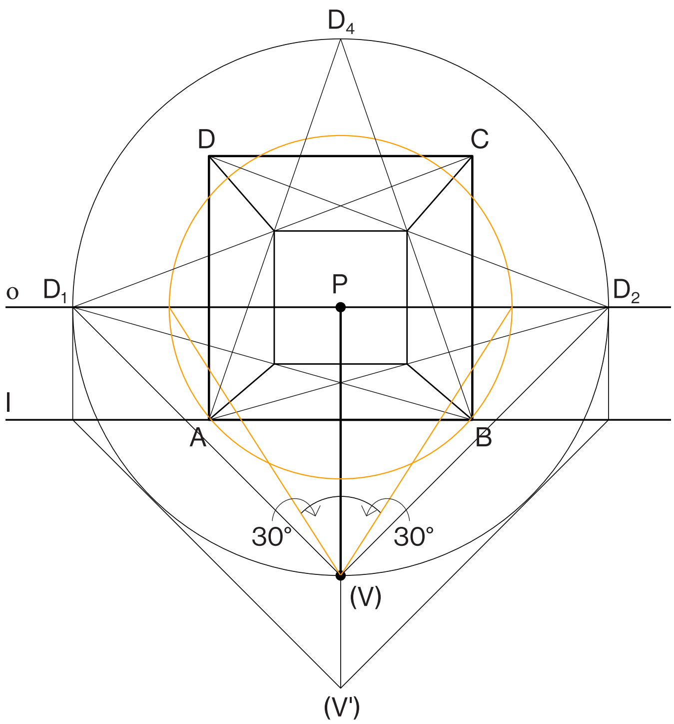
Questa costruzione ricalca il metodo utilizzato dai pittori del Quattrocento, che disegnavano un pavimento a dama per misurare lo spazio. Dal suo sviluppo, per estensione, è derivato il metodo dei punti misuratori, che velocizza la costruzione della prospettiva accidentale.

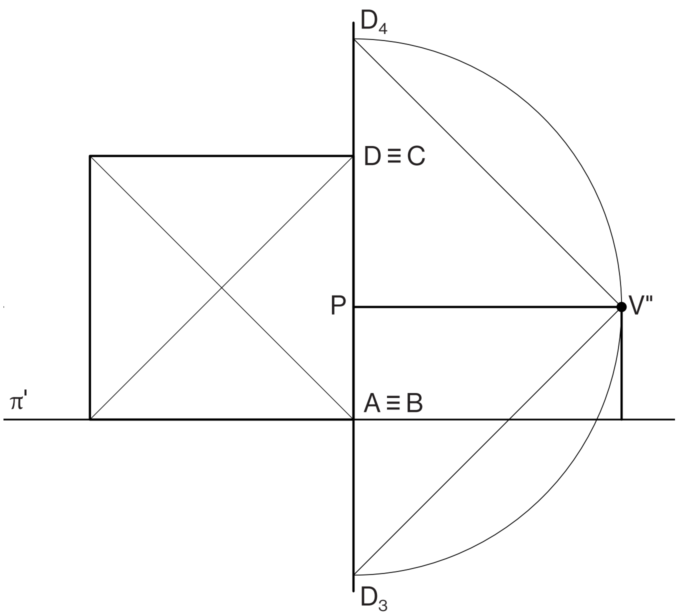

D3
o D1 P D2
D C
I
A B
30° 30°
(V) ≡ D4


D3
o D1 P D2
I
30° 30°
(V) ≡ D4


D C
I ≡ o D1 D2
A B
PS ≡ PV


I ≡ o D1 D2
PS ≡ PV


D4
D C
o D1 P D2
I
A B
30° 30°
(V)
(V')


D4
D ≡ C
P V''
π'
A ≡ B
D3

Metodo delle fughe o delle tracce

Questo procedimento rappresenta le rette attraverso l'individuazione della fuga (intersezione con il quadro della parallela condotta da **V**) e dela traccia (intersezione con il quadro), punti sempre noti nella proiezione.
Si usa quando ci sono coppie di rette ortogonali in posizione obliqua rispetto al quadro e lo spazio viene rappresentato da una posizione d'angolo. Viene spesso usata nella rappresentazione dello spazio esterno per mostrare le forme dell'architettura. La vista risulta meno statica di quella fche si ottiene con la prospettiva centrale.

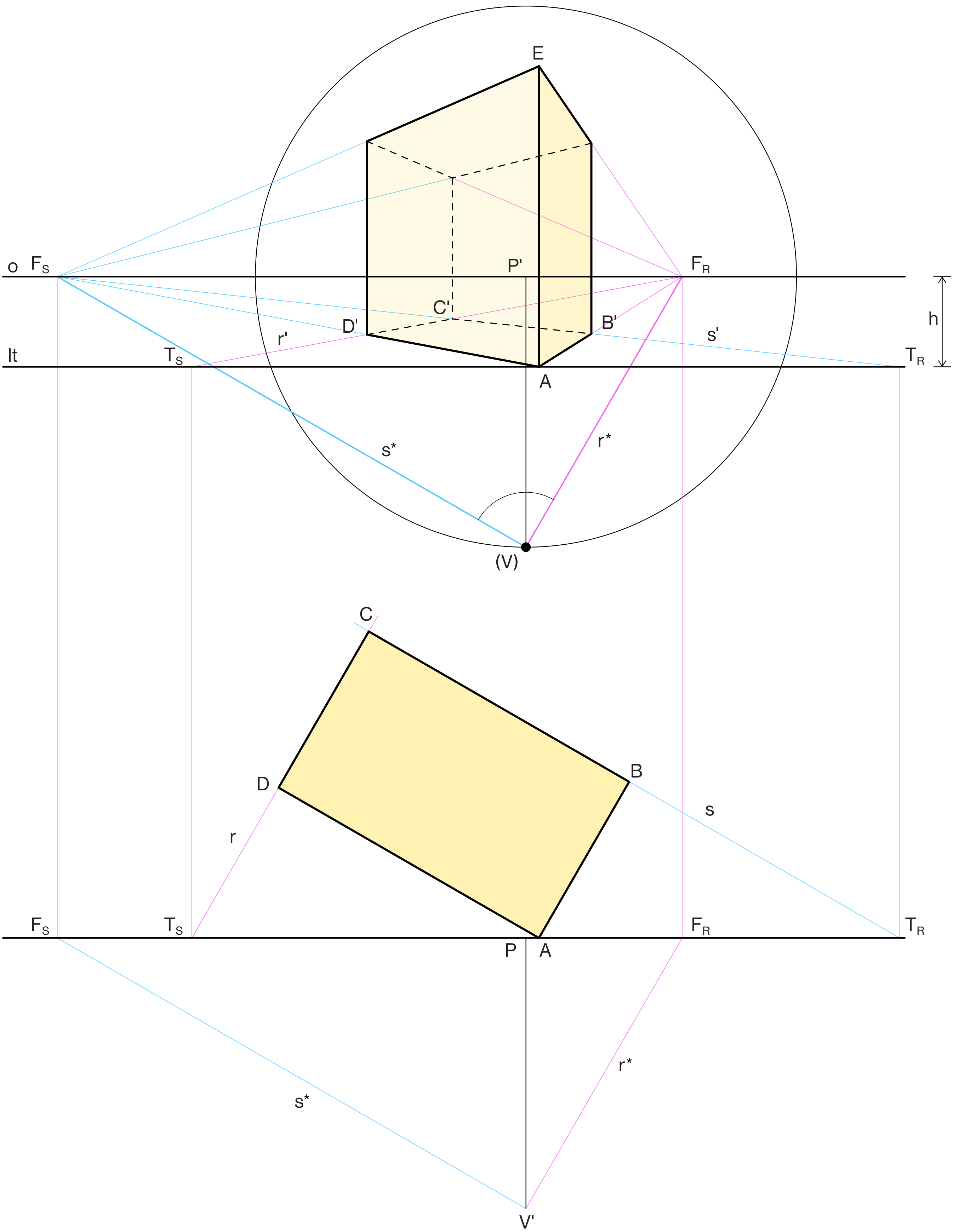
Il tracciamento degli elementi di riferimento principali è di aiuto fondamentale al disegno anche se non si lavora direttamente sul quadro, perchè permette una verifica immediata del trasferimento delle misure dal disegno preparatorio. Pertanto si inizia tracciando:
- il punto principale **P**,
- l'orizzonte **o**,
- la retta verticale fondamentale,
- il cerchio di distanza **d** di centro **P** e raggio **VP**,
- **(V)**, ribaltamento di **V** rispetto sul quadro rispetto all'orizzonte,
- il cerchio visivo **r**, interno a **d** (più piccolo),
- la linea di terra a distanza **h** dall'orizzonte **o**.

Le facce dell'oggetto sono disposte in modo generico rispetto al quadro (è opportuno verificare sempre che l'oggetto rientri nel cerchio visivo **r**).
Una coppia di rette perpendicolari tra loro avrà 2 punti di fuga (destro e sinistro), se sono orizzontali le fuge saranno sull'orizzonte.

In genere si fa coincidere uno spigolo verticale con il quadro, in modo da poter misurare direttamente le altezze su di esso. Quindi in primo piano si trova lo spigolo verticale centrale (che per dare una buona inquadratura non deve coincidere con la retta fondamentale), mentre le coppie di rette perpendicolari convergono in due diversi punti di fuga, situati sull'orizzonte o a destra e a sinistra di **P**.
Tutte le linee orizzontali che si trovano sopra l'orizzonte convergono verso il basso, mentre quelle che si trovano sotto l'orizzonte convergono verso l'alto.

Le coppia di ortogonali hanno le due fughe vincolate dall'agolo di icidenza e ruotano insieme. Pertanto fissata sull'orizzonte la fuga di una retta orizzontale, si ricava la fuga della perpendicolare sull'orizzonte dalla parte opposta di **P**, costruendola come indicato a p. 54-55.

Trovate le fughe si riportano le tracce delle rette corrispondenti sulla linea di terra e si procede a ricostruire la prospettiva della pianta, poi si misurano le altezze sul quadro.


E
o
F_S
P'
F_R
C'
D'
B'
h
r'
s'
lt
T_S
T_R
A
s*
r*
(V)
C
B
D
s
r
F_S
T_S
P
A
F_R
T_R
r*
s*
V'

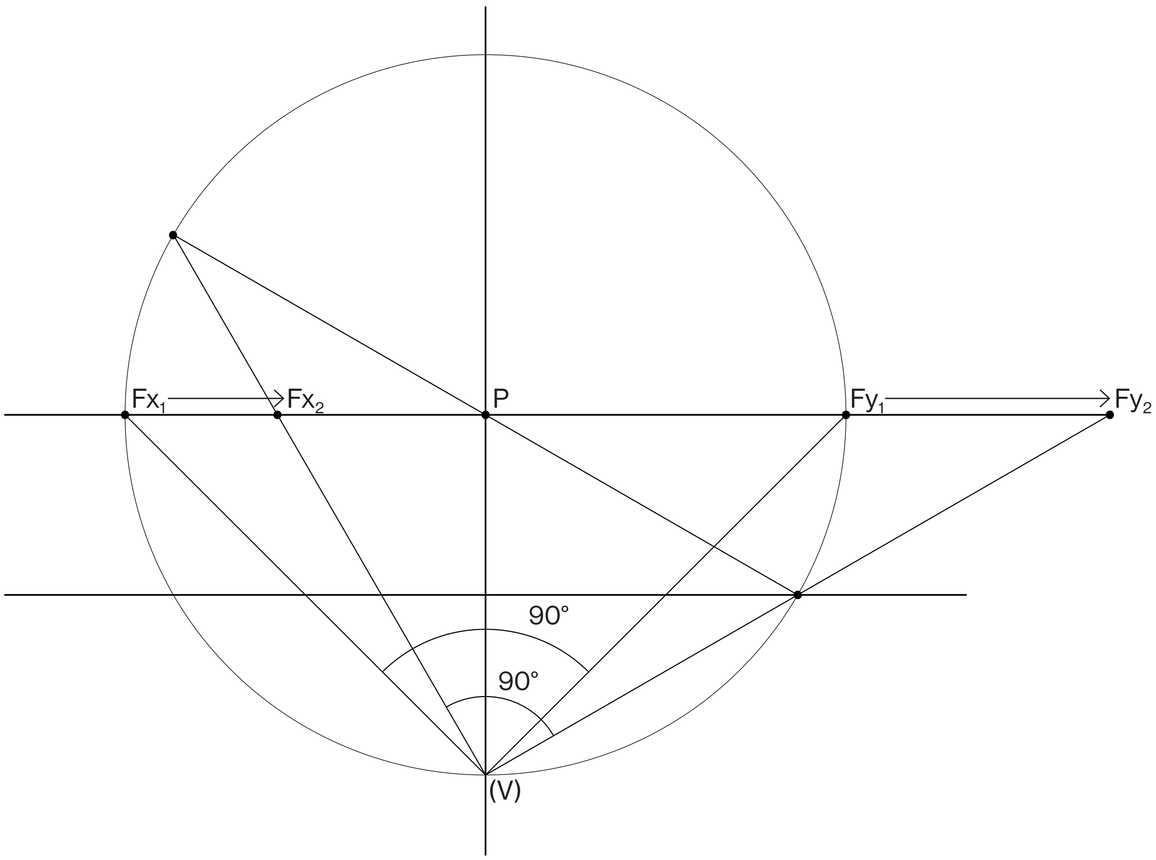
Copie di coniugate (fuga delle rette perpendicolari)

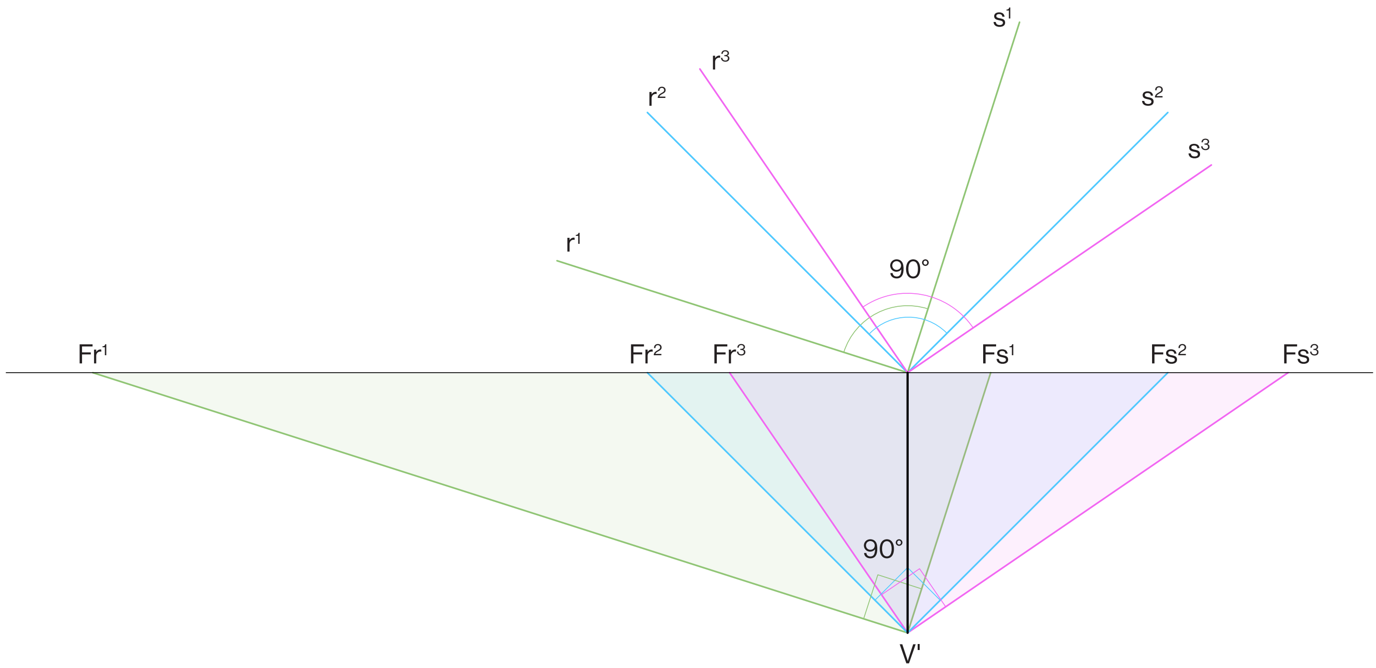
Le fughe di coppie di coppie di rette perpendicolari hanno le fughe vincolate una all'altra ed esse si dicono vincolate rispetto al cerchio di distanza, per cui fissata una fuga si può determinare l'altra con una costruzione geometrica .

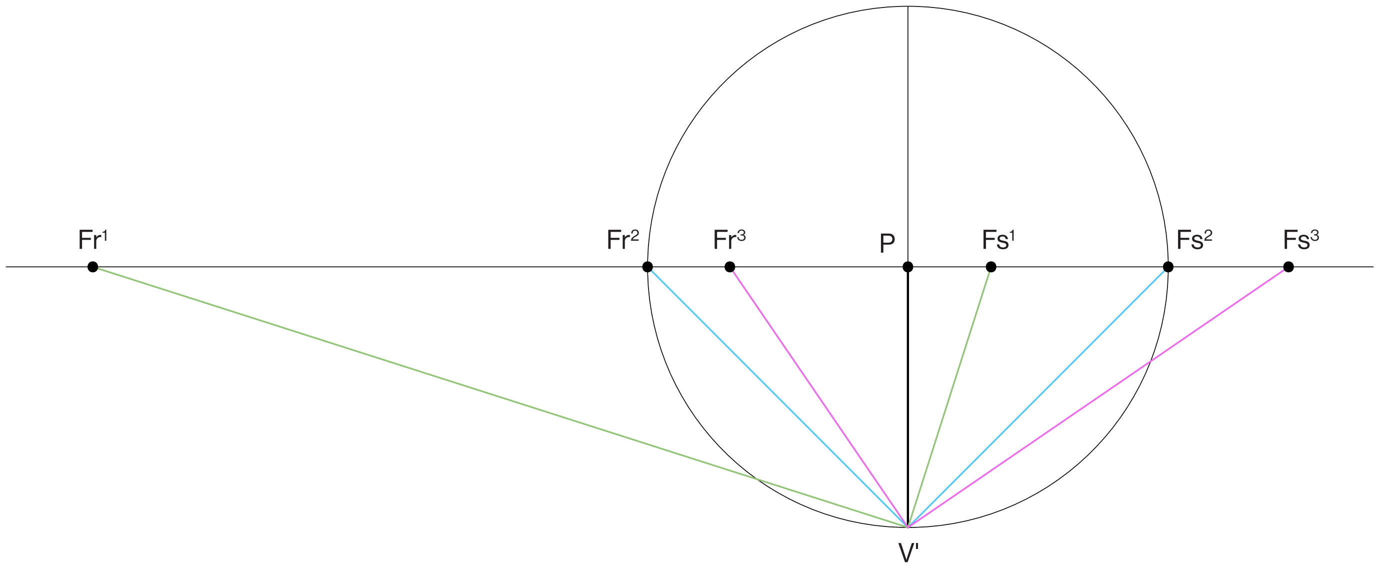
Se immaginiamo di ruotare una copia di rette ortogonali, che sono vincolate, le loro fughe si muovono insieme e quando una retta diventa perpendicolare al quadro la sua fuga va in **P** mentre l'altra retta diventa parallela al quadro e quindi la fuga è impropria.

Pertanto fissata sull'orizzonte la fuga di una retta orizzontale, è immediato ricavare la fuga della retta perpendicolare (che è sempre sull'orizzonte dalla parte opposta di **P** costruendola rispetto al diametro del cerchio di distanza, ricordando che l'angolo al vertice in **(V)** è doppio dell'angolo al centro; conoscendo il cerchio di distanza si traccia l'angolo al centro corrispondente al diametro per il il punto di intersezione con il prolungamento del segmento **VFr**, congiungendo poi l'estremo opposto con **(V)** si traccia la perpendicolare sull'angolo alla circonferenza;
sull'intersezione con l'orizzonte si trova la fuga della retta perpendicolare alla prima.

Questa costruzione permette di posizionare correttamente le fughe di rette ortogonali direttamente sul quadro, senza dover ricorrere ad un disegno preparatorio.



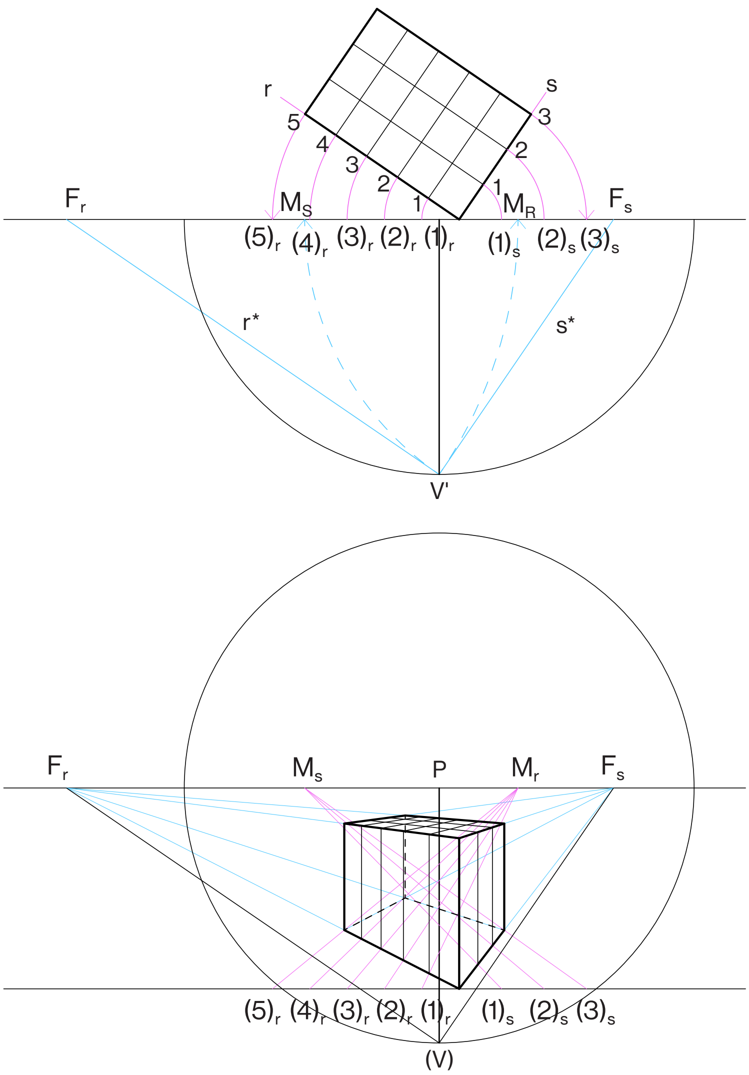

s1
r3
r2
s2
s3
r1
90°
Fr1
Fr2
Fr3
Fs1
Fs2
Fs3
90°
V'

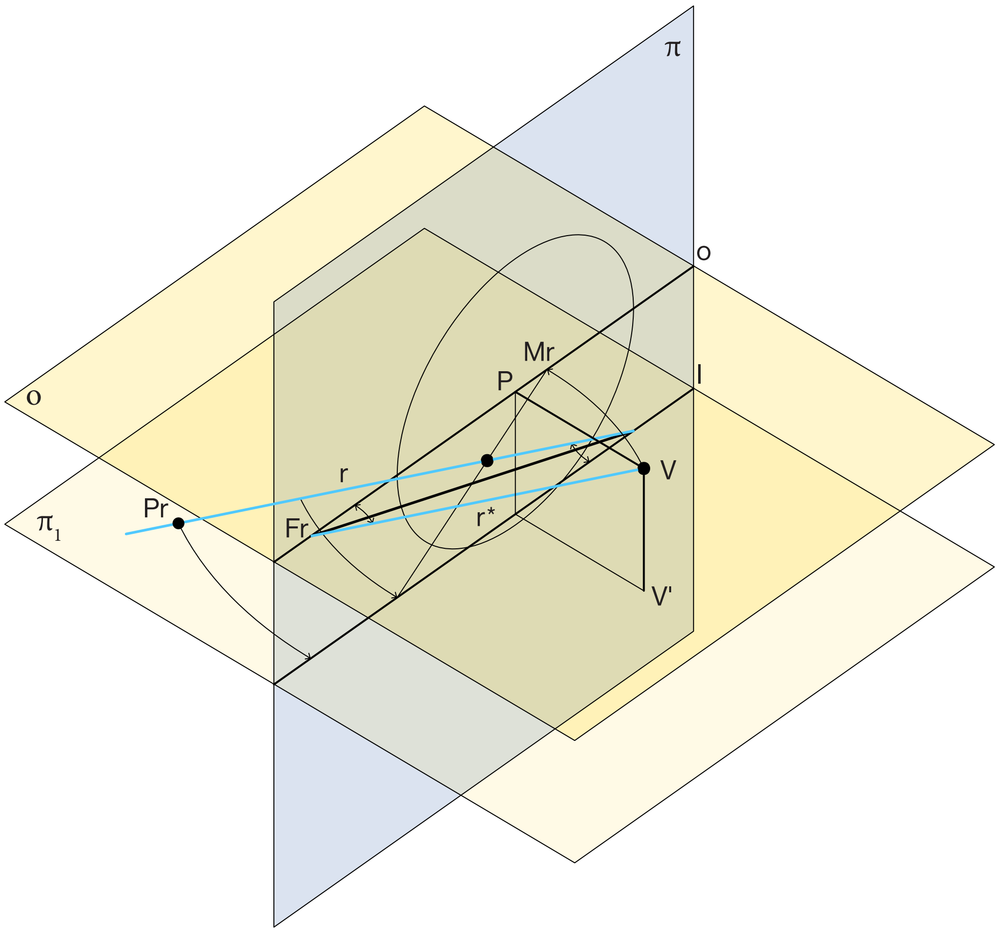

Fr1
Fr2
Fr3
P
Fs1
Fs2
Fs3
V'

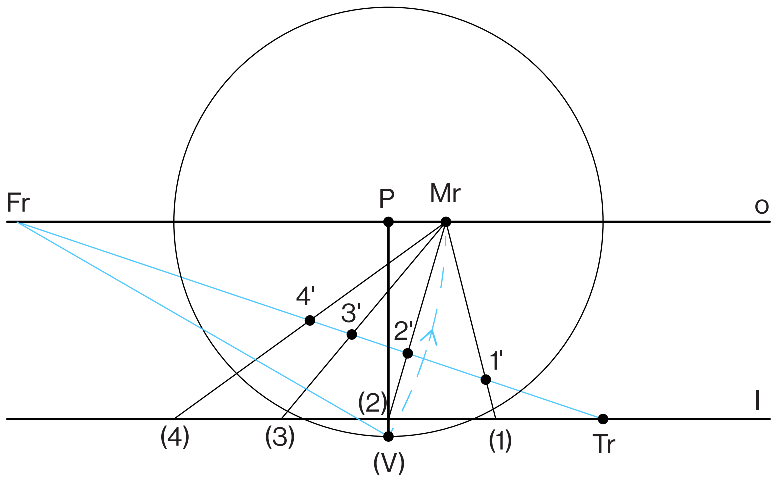
4. Prospettiva

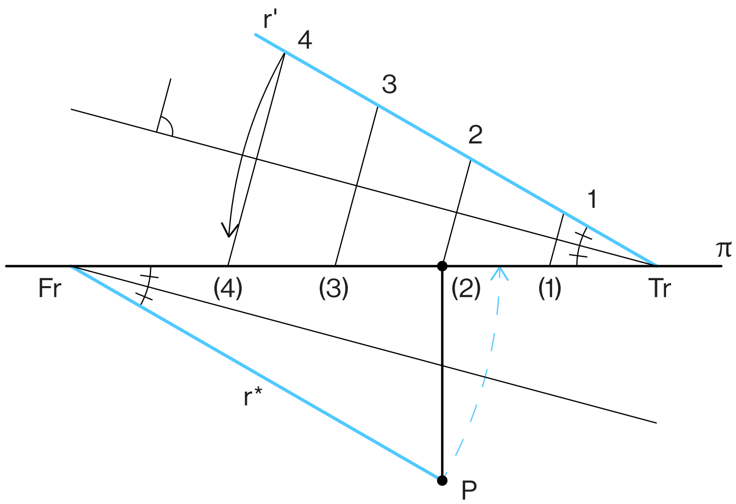
Metodo dei punti misuratori (ribaltamento della retta)

Il metodo dei punti misuratori consente di velocizzare la misura della distanza prospettica tra punti allineati (appartenenti ad una stessa retta), ribaltando la retta sul quadro e allineandoli in prospettiva con la direzione del ribaltamento. Data una retta r e la sua prospettiva **r'**(**TrFr**) posso ribaltare **r'** da **Tr** in **(r)**. Poiché il ribaltamento corrisponde alla proiezione da un centro improprio perpendicolare al piano bisettore, la fuga della direzione **Fd** proietta i punti di **r** nei punti corrispondenti di **(r)** e viceversa. Pertanto l'allineamento con i punti misurati su un qualsiasi ribaltamento di **r'** su **p** permette di misurare le distanze relative sulla **r'**, prospettiva della retta **r**. Sapendo che la fuga di una retta si trova all'intersezione tra la parallela per **V** e il quadro **p**, per trovare **Fd** è sufficiente ribaltare **V** sul quadro da **Fr**, ruotandolo nello stesso verso. Tale ribaltamento di **V** permette di misurare la retta **r** e pertanto prende il nome di punto misuratore o punto di misura **Mr**. Se la retta appartiene al piano geometrale **p'** e quindi è orizzontale, **Tr** sarà sulla linea di terra **lt**. Risulta allora conveniente ribaltare **r'** su p da **Fr** in **lt** e ribaltare **V** fa **Fr** in **Mr** sull'orizzonte **o**. Allo stesso modo posso procedere per qualsiasi retta della quale siano note la traccia e la fuga. **Mr**, ribaltamento di **V** è il punto misuratore della retta, perché congiungendolo alle misure prese su **(r)** si trovano le misure corrispondenti sulla prospettiva della retta. Infatti, **Mr** è la fuga delle perpendicolari alla bisettrice dell'angolo a tra la retta **r** e il quadro **p**, quindi è il centro dal quale si proietta il ribaltamento di **r** sulla linea di terra **l**, e allineando **Mr** con i punti misurati su **(r)** si troverà su **r'** la loro prospettiva. Il ribaltamento della retta **r** rispetto alla sua traccia può avvenire su qualsiasi piano, purchè il ribaltamento contemporaneo di **V** in **Mr** da **Fr** avvenga su un piano parallelo a quello sul quale ruota la retta **r**.



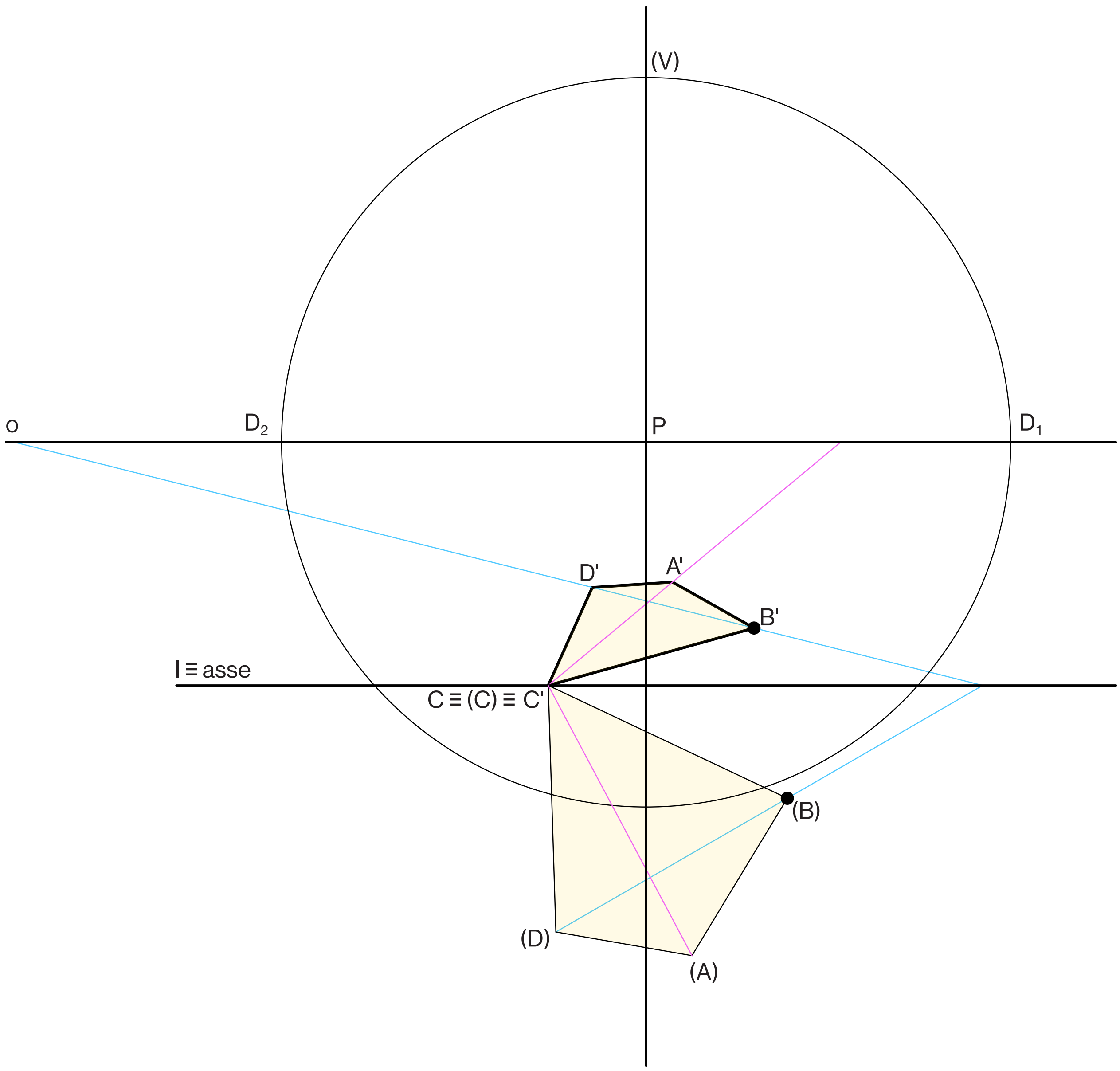

π
o
o
Mr
P
l
r
V
Pr
π1
Fr
r*
V'


Fr
P
Mr
o
4'
3'
2'
1'
(2)
l
(4)
(3)
(V)
(1)
Tr


r'
4
3
2
1
π
Fr
(4)
(3)
(2)
(1)
Tr
r*
P

Ribaltamento del piano geometrale

Il ribaltamento del piano geometrale **π'** sul quadro **π**. velocizza il disegno in prospettiva della pianta, disegnando direttamente sul quadro senza dover riportare un disegno preparatorio a scala ridotta.
Per effetto del ribaltamento il piano geometrale **π'** ruoterà di 90° intorno alla sua traccia, ovvero la linea di terra **l**, mentre **V** si ribalta in **(V)**, posto sulla retta fondamentale per **P**, ad una distanza da **(V')** uguale alla distanza di **V** da **π'** (altezza dell'orizzonte).
È possibile determinare velocemente la prospettiva tenendo conto dell'omologia (corrispondenza biunivoca dei punti) di centro **(V)** e asse **l** tra il piano geometrale **π'** per la quale *rette corrispondenti si incontrano sull'asse e punti corrispondenti sono allineati con il centro*.



Nel caso di piante complesse, risulta il ribaltamento del geometrale risulta molto conveniente perchè velocizza il disegno.

Ribaltando il geometrale **π'** sul quadro è si determina una relazione omologica (corrispondenza proiettiva biunioca) tra gli elementi del geometrale **π'** ribaltati sul quadro **π** e la loro proiezione prospettica. Considerando una figura **T** appartenente al piano geometrale p1si ha infatti che **(T)** e **T'** sono omologhe in quanto proiezione di **T** da due centri distinti, che sono rispettivamente **R** improprio ortogonale al piano bisettore il diedro formato dal piano geometrale e dal quadro, e **V**.
Si ha quindi un'omologia di centro **(V)** e asse sulla linea di terra **l**.